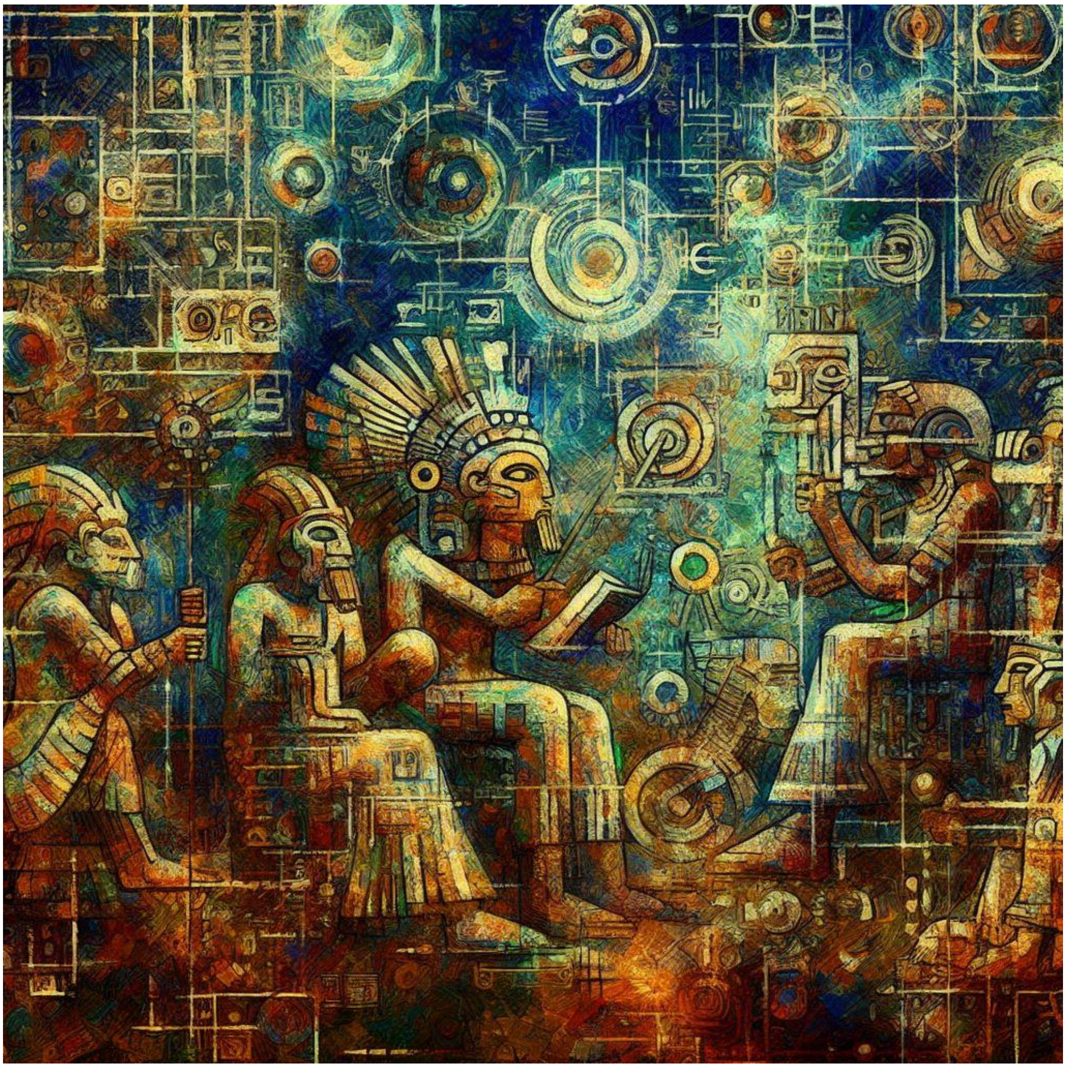
Die Mathematik alter Völker

Ein historischer Vergleich der mathematischen Kenntnisse der Maya und der alten Ägypter

Sebastian Ludwig



Wettbewerbsarbeit für Schweizer Jugend forscht

Bericht zur Untersuchung

Die Mathematik alter Völker

Ein historischer Vergleich der mathematischen Kenntnisse der Maya und der alten Ägypter

Seewis Dorf, 29.03.2024

Autor: Sebastian Felix Ludwig

Coach: Gian Peter Ochsner

Beisitzer: Michael Brand

Fachperson von Schweizer Jugend forscht: Mike Rohr

Vorwort

Diese Untersuchung wurde im Rahmen der Maturitätsarbeit während des 5. und 6. Gymnasialjahres an der Evangelischen Mittelschule Schiers durchgeführt. Bezüglich Themenfindung taten sich anfangs einige Schwierigkeiten auf: Für mich stand zwar früh fest, dass ich in meiner Arbeit einen historischen Vergleich durchführen möchte, jedoch fiel es mir schwer, mich für einen konkreten Aspekt zu entscheiden, der sich als Vergleichskriterium eignen würde. Nach mehreren Gesprächen mit verschiedenen Lehrpersonen während der Sonderwoche MA/SA habe ich dann das passende Thema für meine Maturaarbeit gefunden: Der Vergleich der Mathematik der Maya und der Ägypter[1]. Ich finde es spannend, wie Fachgebiete, die zunächst in keinem Zusammenhang zu stehen scheinen, bei genauerer Betrachtung und mit dem nötigen Hintergrundwissen dennoch verknüpft werden können. Deshalb wollte ich auch in meiner Maturaarbeit eine Brücke zwischen meinem SF (Physik/Angewandte Mathematik) und meinem EF (Geschichte) schlagen und eine fachübergreifende Arbeit schreiben. Diese Arbeit hat mir einerseits ermöglicht, etwas Neues in diesen beiden Fachgebieten zu lernen, das im gewöhnlichen Mathematik- bzw. Geschichtsunterricht keinen Platz findet. Andererseits konnte ich mich von einer eurozentrischen Sichtweise auf die Mathematik loslösen und so meinen Horizont erweitern. Der Bericht dieser Untersuchung richtet sich an alle, die Interesse an der Geschichte der Mathematik und ihren komplexen Zusammenhängen haben.

Auch wenn ein Grossteil dieser Untersuchung aus sich wiederholender und ermüdender Recherchearbeit bestand, bin ich sicher, dass ich viel daraus mitnehmen konnte. Ich habe Erfahrungen mit geeigneterer und weniger geeigneterer Literatur, mit präziser Auswertungsarbeit und mit dem Schreiben und Belegen wissenschaftlicher Arbeiten gemacht, welche mir im Studium bestimmt helfen werden.

An erster Stelle möchte ich meinem Coach, Gian Peter Ochsner, danken. Mit seiner hilfsbereiten Art und all den Auskünften, Gesprächen und Feedbacks hat er viel zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Weiter möchte ich meinem Beisitzer und Schwerpunktfachlehrer, Michael Brand, für die Zusage und die Bewertung meines Berichts danken. Ausserdem hat er mich bei der Themenwahl auf den richtigen Weg gebracht, indem er die Mathematik als Vergleichskriterium vorgeschlagen hat, und er hat mir für die Recherchearbeiten bereitwillig Literatur ausgeliehen. Nicht zuletzt hat auch meine Familie einen herzlichen Dank verdient. Sie hat mir einerseits bei der Themensuche geholfen, unzählige Korrekturlesungen vorgenommen und zahlreiche Fragen beantwortet. Andererseits hat sie mich in allen Phasen der Entstehung dieser Arbeit mental unterstützt und aufgemuntert.

Seewis Dorf, 17.10.2023

Sebastian Felix Ludwig

[1] In dieser Arbeit wird aus historischen Gründen ausschliesslich das generische Maskulinum verwendet, da die Schreiber im alten Ägypten allesamt männlich waren.

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Die Maya und die alten Ägypter waren zwei geographisch und zeitlich getrennte Völker, die beide ein herausragendes mathematisches Wissen besassen. Dennoch wiesen ihre mathematischen Methoden und Fähigkeiten fundamentale Unterschiede auf. Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es, im historischen Kontext die Gründe für diese Unterschiede aber auch für Gemeinsamkeiten der beiden Kulturen zu suchen. Die Schwerpunkte lagen dabei auf dem Zahlensystem, der Zahlschrift, der Geometrie und den Masseinheiten sowie den Rechentechniken und Anwendungen der Maya und Ägypter. Erkenntnisse aus der Sekundärliteratur verschiedener Autor:innen wurden zusammengetragen und genutzt, um die Gründe für Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu finden. Dabei wurden mehrere mögliche Begründungen gleichzeitig untersucht, um kausale Beziehungen im grösseren Kontext – auf der Makro-Ebene – zu finden.

Die These, dass sich zwar die Wahl der Zahlzeichen und Zahlsysteme unterscheidet, jedoch Rechenarten und Geometrie Ähnlichkeiten aufweisen, konnte widerlegt werden. Während sich Symbole grösserer Zahlen zwar unterscheiden, lassen sich Ähnlichkeiten in der Darstellung kleinerer Zahlen auf den gemeinsamen Ursprung des Zählens mit Steinen und Stöcken und deren symbolische Abbildungen zurückführen. Trotz unterschiedlicher Wahl der Basen 10 und 20 der Zahlsysteme lassen sich beide auf die Anatomie des menschlichen Körpers, nämlich die Anzahl Finger beziehungsweise Zehen zurückführen. Mangels Primärquellen der Maya-Kultur liessen sich, bis auf die Grundrechenarten, sowohl zwischen der Geometrie als auch den Rechentechniken der beiden Kulturen wenige Gemeinsamkeiten finden. Eine weitere These beschrieb die Beeinflussung der Mathematik beider Kulturen durch umweltbezogene Begebenheiten. Die erhaltenen Daten zeigen, dass diese These vor allem für die Methoden und Fähigkeiten der Maya bezüglich ihrer Zeitrechnung zutrifft. Allerdings spielten auch anatomische Eigenschaften des Menschen, beispielsweise in der Wahl der Basis oder der ägyptischen Zahlzeichen eine Rolle.

Die These der Architektur, der Religion und der Struktur der sozialen Schicht als entscheidende soziokulturelle Faktoren auf die Entwicklung der Mathematik konnte bestätigt werden, wobei die Mathematik der Maya eher durch ihre Religion geprägt wurde, was am Beispiel der Götterköpfe als Zahldarstellung ersichtlich ist. Vermutlich wurde die ägyptische Mathematik hingegen stärker durch die Architektur beeinflusst, was die sorgfältige Organisation von Bauprojekten zeigt. Die Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen wie Rationenverteilungen in den Papyri zeigen, dass die ägyptische Mathematik auch durch den Verwaltungsapparat der Schreiber beeinflusst wurde. Da Maya-Quellen dieser Art fehlen, konnte die These des Handels und der Organisation staatlicher und militärischer Bürokratie als politisch-wirtschaftliche Einflussfaktoren nur bezüglich der ägyptischen Mathematik belegt werden. Zudem zeigte sich, dass vor allem die Mathematik der Maya von Einflüssen durch Nachbarkulturen profitierte, was beispielsweise anhand der verwendeten Zahlschrift gezeigt werden konnte. Während die von den Maya verwendete Zahlschrift auch auf Inschriften anderer mittelamerikanischer Völker gefunden wurde, verwendet die ägyptische Zahlschrift Abbildungen typisch ägyptischer Flora und Fauna. Für aussagekräftigere Ergebnisse sowie für die Beantwortung weiterer Untersuchungsfragen oder die Ausweitung der Untersuchung auf zusätzliche Völker, müssten mehr Daten in Form von Primärquellen sowie Sekundärliteratur in Betracht gezogen werden.

1 Einleitung

Die Geschichte der Menschheit beschreibt die Entwicklungen und Anpassungen menschlicher Gesellschaftsformen vom ersten Urmenschen bis hin zur modernen Gegenwart. Diese Veränderungen haben sich jedoch keineswegs einheitlich ereignet, sondern waren vielmehr ein dynamischer Prozess, welcher sich zwar, die Gesamtheit der zahllosen Kulturen betrachtend, kontinuierlich, aber von Kultur zu Kultur weder räumlich noch zeitlich einheitlich ausgeprägt hat.[2] Dennoch gibt es Parallelen wie beispielsweise das Militärwesen oder die Sklaverei,[3] die, egal ob sie in einem deutlich ersichtlichen Zusammenhang stehen oder nicht, gemeinsame Ursachen zumindest vermuten lassen. Die vergleichende Geschichte ist ein Zweig der Geschichtswissenschaft. Sie überprüft unterschiedliche historische Ereignisse, Strukturen und Phänomene, um die Ursachen derer Ähnlichkeiten und Unterschiede zu bestimmen, einzuordnen und zu generalisieren.[4]

1.1 Der historische Vergleich

> *Unter dem historischen Vergleich versteht man üblicherweise die systematische Gegenüberstellung von zwei oder mehreren historischen Einheiten (von Orten, Regionen, Nationen oder Zivilisationen, auch historische Persönlichkeiten), um Gemeinsamkeiten und Unterschiede, Annäherungen und Auseinanderentwicklungen zu erforschen. Dabei geht es nicht nur darum, diese zu beschreiben, sondern sie auch zu erklären und Typologien zu entwickeln.*[5]

Diese Definition, formuliert vom Historiker Hartmut Kaelble (*1940), entspricht dem heute gefestigten und anerkannten Konzept des historischen Vergleichs, der sich mit der Erklärung und Einordnung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden verschiedener historischen Einheiten auseinandersetzt. Im Gegensatz dazu waren die Vertreter der ursprünglichen Geschichtswissenschaft im 19. Jahrhundert jedoch der Auffassung, dass die Geschichte keine vergleichende Wissenschaft sei.[6] Die Schule des (deutschen) Historismus distanzierte sich von den Naturwissenschaften, welche sich die Klassifizierung und Hierarchisierung aller Lebewesen zur Aufgabe machten.[7] Der Historismus sah in jedem Ereignis eine Individualität, einen Eigenwert, der nicht durch philosophische oder soziologische Erklärungen weiter reduziert und verallgemeinert werden kann und darf. Anstelle einer Einordnung in irgendeiner Art wird also als «anti-naturwissenschaftlicher Reflex» die Einzigartigkeit einer Epoche oder eines Geschehnisses herausgearbeitet und eine spezifische Identität geschaffen.[8]

Im Sinne des Historismus darf der historische Vergleich auch nicht versuchen, Ähnlichkeiten auf «allgemein gültige Gesetze» zurückzuführen. Anders als bei den Naturwissenschaften gibt es keine Konstanten mithilfe derer man den Ausgang einer Situation determinieren könnte. Auch wenn geschichtlichen Parallelen ähnliche Voraussetzungen zugrunde liegen können, müssen sich Historiker:innen dennoch den prinzipiell offenen Möglichkeiten einer geschichtlichen Entwicklung bewusst sein. Der Begriff der *(historischen) Kontingenz* bezeichnet diese gleichzeitige Nicht-Unmöglichkeit und Nicht-Notwendigkeit. Kontingent bedeutet, dass etwas zwar sein kann, deswegen aber nicht sein muss.[9]

[2] Parzinger, 2016, S. 12f.
[3] “Comparative history”, 2022.
[4] Kaufhold, 2020.
[5] Kaelble, 2012.
[6] Welskopp, 2010.
[7] Ebd.
[8] Ebd.
[9] Niederberger, 2022.

Auch in aktuelleren geschichtswissenschaftlichen Diskussionen begegnen Kritiker:innen dem historischen Vergleich mit einer gewissen Skepsis.[10] In der Holocaust-Forschung warnt man beispielsweise vor der Verharmlosung eines solchen «singulären» und unvergleichlich schlimmen Verbrechens. Verallgemeinerungen und Vergleiche führten unausweichlich zu Verharmlosungen, denn ein Vergleich könne als Gleichsetzung mit ähnlichen Ereignissen und somit als Wertminderung der geschichtlichen Relevanz empfunden werden. Für die heute dem historischen Vergleich gegenüber kritischen Historiker:innen soll Geschichte aber hauptsächlich dazu beitragen, die Einzigartigkeit einer historischen Einheit hervorzuheben und eine Identität zu schaffen. Laut dem deutschen Historiker Thomas Welskopp (1961-2021) treffe dies allerdings für die teilweise distanziert-kühle Betrachtungsweise eines historischen Vergleichs nur bedingt zu.

Trotzdem haben sich frühe Verfechter des Historischen Vergleichs an den Naturwissenschaften orientiert und wurden von den beiden Vergleichslogiken nach dem Philosophen John Stuart Mill (1806-1873) beeinflusst.[11] Die *Methode der Differenz* untersucht Unterschiede bei Experimenten, deren Ausgangsbedingungen bis auf einen einzigen Faktor identisch sind, und versucht diese Abweichungen auf den unterschiedlichen Faktor zurückzuführen. Die *Methode der Übereinstimmung* betrachtet Parallelen und Annäherungen bei Versuchsergebnissen und leitet diese von einem einzigen gemeinsamen Faktor bei ansonsten ungleichen Versuchsvoraussetzungen ab.[12] Nach dem Historiker Marc Bloch (1886-1944) bedeutet das, übertragen auf die Geschichtswissenschaft, dass entweder möglichst gleiche oder möglichst ungleiche Gesellschaften verglichen werden sollten.[13]

Der Begriff des historischen Vergleichs lässt Raum für Ergänzungen und Weiterentwicklungen.[14] Beispielsweise stieg in den letzten Jahrzehnten das Interesse der Historiker:innen daran, nicht nur historische Einheiten zu vergleichen, sondern auch aufzuzeigen, welchen Einfluss die verglichenen Einheiten aufeinander hatten und wie stark sie verflochten waren. Eine andere Möglichkeit, den Begriff des historischen Vergleichs zu erweitern, ist der Vergleich zwischen aufeinanderfolgenden Epochen der gleichen territorialen Einheit. Die am weitesten verbreitete Auffassung des historischen Vergleichs im klassischen Sinn umfasst jedoch grundsätzlich drei verschiedene Methoden, nämlich den analytischen, den kontrastiven und den verstehenden Vergleich, auf die im Kapitel «Methode» näher eingegangen wird.[15]

Ein mögliches, aber nicht sehr häufig gewähltes Vergleichsobjekt ist die *Mathematik*, das heisst der Umgang mit und die Abbildung von Zahlen, Formen und Körpern. Stattdessen werden heutzutage bei einem historischen Vergleich eher Einheiten aus der Politik-, Sozial-, oder der Wirtschaftsgeschichte vergleichen. Die Mathematik einer Kultur eignet sich als historische Einheit zum Vergleich, da sich seit den Anfängen des mathematischen Denkens eine grosse Vielfalt verschiedener, kulturell geprägter Erscheinungsformen gebildet hat.

1.2 Die Geschichte der Mathematik

Das Wort «Mathematik» ist griechischen Ursprungs und bedeutet «die Kunst des Lernens». Es existiert zwar keine allgemein anerkannte Definition, da es innerhalb der Mathematik viele unterschiedliche Schwerpunkte und Schulen gibt, trotzdem liegt ihr Kern in der Analyse von Zahlen, Mustern und Strukturen. Dieser Kern bildet die Grundlage für alle Auffassungen und Vorstellungen über die Mathematik. Der Mathematiker Gregor Nickel (*1966) beschreibt die Mathematik als eine Wissenschaft, die «durch logische Definitionen geschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und

[10] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Welskopp, 2010.
[11] Kaelble, 2012.
[12] Welskopp, 2010.
[13] Ebd.
[14] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Kaelble, 2012.
[15] Siehe auch Kapitel 2.1.

Muster untersucht.»[16] Die Mathematik besitzt eine lange und interessante Entstehungsgeschichte, die bis zu den Anfängen der Menschheit zurückreicht.

Seit ihrer Entstehung wird die Menschheit von Zahlen begleitet - und fast genauso alt sind die ersten Versuche und Methoden des Menschen, diese zu abstrahieren, sich ihrer zu bemächtigen und die Zahlen als Werkzeug zu nutzen.[17] Angefangen bei den Konzepten des Zählens und der schriftlichen und mündlichen Darstellung bis hin zur Vielfalt der modernen Mathematik, hat sich das Verständnis von Zahlen und mathematischer Abstraktion im Verlauf der Menschheitsgeschichte ständig weiterentwickelt und vergrössert. Verschiedene Völker haben aufgrund der ihnen verfügbaren Mittel und ihrer äusseren Bedingungen unterschiedliche Beziehungen zur Mathematik entwickelt und sich auf unterschiedliche Aspekte konzentriert. So haben sie die Mathematik nach ihren Bedürfnissen geformt, geprägt und die Schwerpunkte und die Dringlichkeit der Weiterentwicklung gesteuert.[18]

1.2.1 Ethnomathematik

Dieser multikulturelle Aspekt der Entstehung der Mathematik darf bei der historischen Erklärung des Begriffs nicht in Vergessenheit geraten. Während die herkömmliche Geschichte der Mathematik oft durch eine eurozentrische Sichtweise geprägt ist, bietet die Ethnomathematik eine andere Perspektive, indem sie die mathematischen Fähigkeiten verschiedener Kulturen und Ethnien in den Vordergrund stellt.[19] Die eurozentrische Sichtweise geht von einer zielgerichteten und klar strukturierten Entwicklung der Mathematik aus, die gesamtheitlich von der westlichen Welt dominiert wird und in der europäischen, von Indien und Arabien beeinflussten Form ihren höchsten Entwicklungsstand erreicht haben soll.[20] Die Ethnomathematik macht es sich nun aber seit ihrer Einführung als eigenständige Fachrichtung in den 1970er-Jahren durch Pioniere wie Ubiratàn D'Ambrósio (1932-2021) und Paulus Gerdes (1952-2014) zur Aufgabe, das Verständnis der Mathematikgeschichte von dieser eurozentrischen Sichtweise loszulösen und das Bewusstsein auf nichteuropäische Einflüsse zu lenken und diese hervorzuheben.[21]

Nicht nur das Aufzeigen dieser aussereuropäischen Einflüsse, die die europäische Kultur unumstritten geprägt und ihr als Vorbild gedient haben, spielt dabei eine zentrale Rolle.[22] Auch mathematische Methoden und Fähigkeiten, die mit dem Untergang ihrer jeweiligen Kulturen verloren gegangen zu sein scheinen, dürfen dabei nicht in Vergessenheit geraten. Beispiele dafür sind die Errungenschaften der Maya, Inka oder Azteken. Zudem soll die Anerkennung des mathematischen Gedankenguts, das zu Unrecht als primitiv abgetan wird und das von einigen Völkern und Stämmen heute noch genutzt wird, die historische Bedeutung dieser Kulturen unterstreichen. Auch wenn diese mathematischen Methoden auf den ersten Blick bedeutungslos erscheinen, erweisen sie sich bei näherer Betrachtung der europäischen Mathematik in Komplexität und Nutzen teilweise durchaus als ebenbürtig.[23] Dabei geht es nicht nur um die Relevanz einer spezifischen Mathematik für die jeweilige Kultur und den Nutzen, den diese spezifischen Methoden der einzelnen Kultur eingebracht haben, sondern auch um die Relevanz der Beiträge dieser Kultur zur Entwicklung der Mathematik als Ganzes. Das Aufzeigen dieses Netzes aus Verbindungen und gegenseitigen Einflüssen soll zu einer historischen Gerechtigkeit gegenüber früher unterschätzten mathematischen Fähigkeiten verschiedener aussereuropäischer Völker führen.[24]

Erst das Bewusstsein um die Diversität der mathematischen Entwicklungsgeschichte ermöglicht überhaupt eine vergleichende Betrachtungsweise. Um mathematische Ausprägungen historisch vergleichen

[16] Nickel, 2012.
[17] Wussing, 2008, S. 6.
[18] Ebd., S. 16-22.
[19] "Ethnomathematik", 2022.
[20] Ebd.
[21] Wussing, 2008, S. 17.
[22] Ebd.
[23] Ebd.
[24] Ebd.

und kausal begründen zu können, darf man also nicht bloss die mathematischen Fähigkeiten derjenigen Kultur untersuchen, der von der Geschichtswissenschaft, nicht immer ganz wahrheitsgetreu, die für ihre Epoche global höchste Entwicklung zugeschreiben wird. Vor allem bei der Betrachtung einer einzelnen Gesellschaftsform muss man sich darüber im Klaren sein, woher die Einflüsse und separaten Beiträge, die diese Gesellschaftsform geprägt haben, tatsächlich stammen. Um eine Entwicklung sinnvoll mit historischen Tatsachen begründen zu können, müssen die wahren und ursprünglichen Voraussetzungen derjenigen Kultur untersucht werden, die eine mathematische Fähigkeit, oder zumindest deren Ansatz, auch wirklich hervorgebracht hat. Eine genau Analyse derjenigen Kultur, die lediglich bereits entwickelte Verfahrensweisen in ihr Repertoire an Methoden aufnimmt, und der Versuch, die Entstehung dieser Verfahrensweisen trotzdem als Verdienst dieser «absorbierenden» Kultur historisch zu erklären, kann möglicherweise zu ungerechtfertigten und verfälschten Begründungen führen.

1.2.2 Ursprung und Entdeckung der Zahlen

Laut dem Mathematiker und autodidaktischen Historiker Georges Ifrah (1947-2019) deuten Forschungen in der Kinderpsychologie und anthropologische Untersuchungen von Völkern, die sich noch heute auf einem relativ wenig entwickelten intellektuellen Stand befinden, darauf hin, dass der Mensch nicht schon immer fähig war zu zählen und grössere Zahlen zu erfassen.[25] Ein rudimentäres Zahlenbewusstsein, welches auch gewisse Tiere, wie beispielsweise einige Vogelarten, besitzen, ermöglichte es dem Urmenschen jedoch immerhin kleine, aber konkrete Mengen von Gegenständen zu vergleichen und ihrer Grösse nach zu unterscheiden. Durch das Erlernen des Zählens, was den Menschen von den übrigen Tieren unterscheidet, konnte er diese begrenzte Zahlenvorstellung aber überwinden.

Ifrah vermutet, dass für Aufgaben, die eine primitive Vorstufe des Zählens erforderten, wie beispielsweise das Datum einer Zeremonie festzuhalten oder sicherzustellen, dass sich die ursprüngliche Anzahl Weidetiere seit der letzten Kontrolle nicht verringert hat, der Mensch sich einiger Hilfsmittel bedient habe.[26] Laut Ifrah waren diese Hilfsmittel natürliche Objekte, die in sich eine einzelne Einheit oder eine Menge von Einheiten darstellen. Die Natur bot zahlreiche solcher Vorbilder, unter anderem in Form von tierischen oder pflanzlichen Körperteilen; Beispielsweise kann ein Kieselstein die Zahl Eins verkörpern, die Flügel eines Vogels die Zahl zwei, die Blätter eines gewöhnlichen Kleeblatts die Zahl drei, die Finger einer Hand die Zahl fünf und die Finger an zwei Händen die Zahl zehn.[27] All diese mathematischen Interpretationsmöglichkeiten, die den Menschen in seiner Welt voller Zahlen ständig umgaben, führten möglicherweise dazu, dass er zu zählen und Zahlen zu nutzen begann. Auch wenn es sich dabei nur um Spekulationen handelt, gibt es einige archäologische Funde, die diese Theorie unterstützen könnten. Einer davon sind die in Abbildung 1 gezeigten Höhlenmalereien in der Höhle von Gargas mit ihren zahlreichen Abbildungen von Händen in Kombination mit einigen Tierzeichnungen.[28] In Anbetracht der Vermutungen Ifrahs ist es beispielsweise möglich, diese Hände als Darstellung der Anzahl erlegten Tiere zu interpretieren. Möglicherweise wurde diese Darstellung durch das Zusammenfassen in Teilmengen mit dem Wert fünf, also vermutlich der Anzahl Finger einer Hand, vereinfacht.

[25] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Ifrah, 1986, S. 21-27.
[26] Ifrah, 1986, S. 14.
[27] Ebd.
[28] "Höhle von Gargas", 2022.

Abb. 1: Handabdrücke[29]

In der menschlichen Vorstellung waren Zahlen konkrete und von der Natur gegebene Mengen von bekannten Objekten oder Lebewesen.[30] Der urzeitliche Verstand hat die Zahl nicht von der zu zählenden Menge getrennt. Er nimmt nicht allein die abstrakte Zahl oder die einzelnen Untereinheiten wahr, sondern die mit dieser Zahl verbundene Gesamtheit einer konkreten Menge. Völker konnten das abstrakte Zählen jedoch umgehen, indem sie Einheit mit Einheit in Verbindung setzten. Dieses Verfahren, bei dem jedem Element der einen Menge ein Element der anderen Menge zugeordnet wird, nennt man *paarweise Zuordnung* oder *Bijektion*. Für jedes Tier, das man auf die Weide lässt, wurde eine Kerbe geschnitzt oder ein Kieselstein beiseitegelegt. Durch die Anwendung einer solchen Hilfsmenge werden Gegenstände von verschiedener Beschaffenheit, aber gleicher Anzahl zueinander in Beziehung gesetzt, wodurch die Quantität einer Menge konkret gemessen und mit anderen Mengen verglichen werden kann. Die in Abbildung 2 dargestellten Einkerbungen zählen laut Ifrah wahrscheinlich zu den ältesten Gegenständen, mit deren Hilfe eine Menge paarweise einer anderen zugeordnet worden ist.

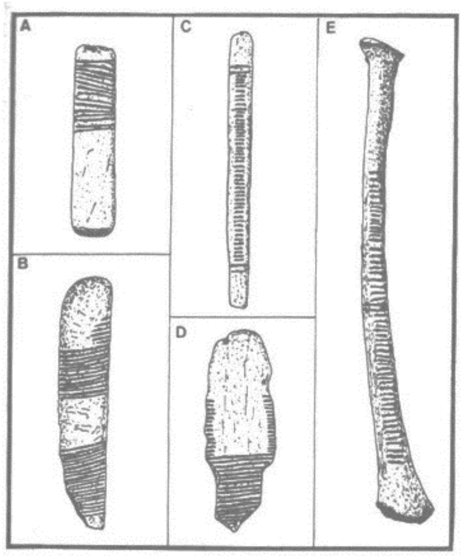


Abb. 2: Knochen mit Einkerbungen aus dem Spätpaläolithikum[31]

[29] Rumeau, 2010.
[30] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Ifrah, 1986, S. 27-36.
[31] Ifrah, 1986, S. 111.

1.2.3 Übergang zu einem abstrakten Verständnis

Um die Zahlen ansatzweise in ihrem abstrakten Wesen zu erfassen, war es für den Urmenschen notwendig, dass er sich von der paarweisen Zuordnung und der sinnlichen Vorstellung von Zahlen als Mengen bekannter Objekte loslöst.[32] Er musste begreifen, dass Mengen quantitativ *gleich* sein können, auch wenn ihre Elemente völlig unterschiedlicher Natur sind. Anstatt jeder Zahl eine bekannte Menge – Finger an einer Hand, Kerben in einem Knochen und so weiter – zuzuordnen, musste er lernen, einer Menge eine Zahl zuzuordnen. Ifrah ordnet der Dualität von Tag und Nacht, einem Augenpaar oder den Flügeln eines Vogels als Gesamtheit jeweils die Eigenschaft des «Zweiseins» zu.[33] Unter der Voraussetzung, die genaue Anzahl zu kennen, kann jeder dieser Gesamtheiten die Zahl zwei zugeordnet werden, ohne dass es sich dabei um die gleichen Elemente der gleichen Menge handelt. Dieser Fortschritt ermöglicht, in Kombination mit einer vergleichenden Logik, welche unterschiedlich grosse Mengen - oder eben Zahlen - unterscheiden kann, die Zuteilung der Zahlen in ein abstraktes System. In diesem System lassen sich die Zahlen der Grösse nach ordnen.[34]

Die Zahlen in diesem System unterliegen dem Prinzip der *Rekursion*. Beginnend bei der Einheit, entsteht jede nachfolgende Zahl aus dem Hinzufügen einer weiteren Einheit zu ihrem Vorgänger.[35] Die erste Zahl ist die Eins, die zweite wird aus der Summe ihres Vorgängers und der Einheit berechnet: zwei $(1 + 1)$; die dritte wird wiederum aus ihrem Vorgänger und dem Hinzufügen einer weiteren Einheit berechnet: drei $(2 + 1)$ und so weiter. Die Elemente einer Menge zu zählen, bedeutet jedem Element ein Symbol zuzuordnen, das der jeweiligen ganzen Zahl entspricht.[36] Dieses Symbol kann ein Wort, eine Gebärde oder ein Schriftzeichen sein.[37]

Um Zahlen darzustellen, gibt es grundsätzlich zwei Varianten: Das *kardinale Prinzip* ordnet der Einheit ein bestimmtes Symbol zu und wiederholt dieses Symbol so oft, wie die darzustellende Zahl Einheiten enthält. Es bezeichnet die Mächtigkeit der Menge.[38] Die Methode des *ordinalen Prinzips* bei welcher jeder Zahl ein von den anderen Zahlen unabhängiges Symbol zugeordnet wird, bezeichnet den Platz der Menge in der Reihenfolge der ganzen Zahlen.[39] Da die einfache Wiederholung der Grundeinheit schnell unübersichtlich wird, und es unmöglich ist, für jede weitere Zahl ein neues Symbol zu schaffen, stossen beide dieser Methoden früher oder später an ihre Grenzen. Der Mensch hat dieses Problem mit der Einführung von *Zahlensystemen* gelöst.[40] Das Konzept der Zahlensysteme wird im nachfolgenden Kapitel genauer beschrieben.

Mit dem Übergang zum abstrakten Denken vor circa 6000 Jahren[41], das für die Entwicklung aller mathematischen Konzepte ausschlaggebend ist, war das Fundament für weitere mathematische Durchbrüche und neue Methoden gelegt. Hier trennten sich die Wege der einzelnen Kulturen, und seither hat die Menschheit die Mathematik auf verschiedene Arten zu dem geformt, was sie heute ist. Diese grosse Vielfalt an mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglicht es, mit dem heutigen geschichtlichen Wissen und nach gründlichen Untersuchungen einzelner Ausprägungen, die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser verschiedenen Ausprägungen anhand eines historischen Vergleichs aufzuzeigen.

---

[32] Ifrah, 1986, S. 42.
[33] Ebd., S. 23.
[34] Ebd., S. 42.
[35] Ebd.
[36] Siehe auch Kapitel 1.2.2.
[37] Ifrah, 1986, S. 44.
[38] “Kardinalzahl (Mathematik)”, 2022.
[39] “Ordinalzahl”, 2023.
[40] Ifrah, 1986, S. 53.
[41] Wussing, 2008, S. 6.

1.3 Das heutige Verständnis der Mathematik früherer Epochen

Das heutige Verständnis der Geschichtsforschung und der Mathematik wirft ein anderes Licht auf die mathematischen Fähigkeiten von früheren Kulturen. Im Nachhinein können die mathematischen Methoden von verschiedenen Kulturen verglichen und Gemeinsamkeiten oder Ähnlichkeiten in ihrer unabhängigen Entwicklung aufgezeigt werden. Dieser allgemeine Überblick ermöglicht das Ermitteln von vier grundlegenden mathematischen Charakteristiken, die sich auf die eine oder andere Weise in den Ausprägungen der mathematischen Entwicklung aller komplexeren Völker wiedererkennen lassen. Diese komplexen Zivilisationen zeichnen sich beispielsweise durch Sesshaftigkeit, Schriftgebrauch oder ein organisiertes Staatswesen mit politischen Instanzen aus. Die vier Charakteristiken – Zahlensystem, Zahlschrift, Geometrie und Rechenverfahren[42] – werden im Folgenden kurz erläutert.

1.3.1 Zahlschrift

Um Zahlen zu unterscheiden, zu kombinieren oder festzuhalten, begann der Mensch den Zahlen Symbole zuzuordnen. Das Zählen mit Gegenständen konnte so durch eine entsprechende Operation mit Zahlensymbolen ersetzt werden.[43] Laut dem französischen Philosophen Raymond Balmès (1917-1962) zeigt die Unterscheidung zwischen realen Gegenständen und der symbolischen Darstellung dieser Realität, dass die Zahlen erst durch das menschliche Denken erschaffen wurden.

> *Dies beweist, dass sich die Zahl nicht aus Dingen herleitet, sondern aus dem sich auf die Dinge richtenden Denken, wobei die Wirklichkeit die Zahl nahelegt, aber keineswegs hervorbringt; wir wandeln die Realität in einen Gegenstand des Denkens.*[44]

Schriftliche Zahlzeichen sind graphische Zeichen aller Art. Das können Vertiefungen in Ton oder in Stein, Kerben, Bildzeichen, Buchstaben des Alphabets, abstrakte Symbole sowie gravierte, gezeichnete oder gemalte Striche sein.[45] Solche Zeichen werden *Ziffern* genannt. Der Begriff der Ziffer darf allerdings nicht mit dem Begriff der Zahl verwechselt werden. Eine Zahl steht für die Quantität einer Menge, wohingegen eine Ziffer ein graphisches Zeichen ist, das eine Zahl darstellt, aber mit dieser nicht identisch ist.[46] Beispielsweise besteht die Zahl 2023 aus den Ziffern 2, 0, 2 und 3. Nebst den schriftlichen Methoden wurden und werden auch *konkrete Zahlzeichen* wie Gesten oder geknotete Schnüre benutzt.[47]

Die riesige Vielfalt an Zahlensymbolen ermöglicht spezifische Vergleiche verschiedener Kulturen, wobei erwähnt werden muss, dass keine absolute Rangordnung der Darstellungsarten von Ziffern aufgestellt werden kann,[48] sondern sich jede einzelne durch ihre individuellen Vor- und Nachteile auszeichnet.

1.3.2 Zahlensystem

Viele Zahlensysteme[49] sind *Stellenwertsysteme.*[50] Die Grösse einer Menge wird mit einem Zahlzeichen beschrieben, wovon eine begrenzte Anzahl zur Verfügung stehen. In unserem gebräuchlichen Dezimalsystem sind das zehn, nämlich die Ziffern von 0 bis 9. Sind alle verfügbaren Zahlzeichen einmal verwendet worden, erweitert man die Darstellung der Zahl um eine weitere Ziffer. Bei jedem abgeschlossenen Durchgang von 0 bis 9 der ersten Ziffernstelle, also wenn die verfügbaren Zahlzeichen aufgebraucht sind, wird anschliessend die zweite Stelle um einen Einheitswert erhöht. Sind auch alle

[42] Jäger, 2014, S. 6.
[43] Ebd., S. 47.
[44] Balmès, 1965, zit. nach: Ifrah, 1986, S. 47.
[45] Ifrah, 1986, S. 49.
[46] Ebd.
[47] Ebd., S. 47.
[48] Ebd., S. 49
[49] Siehe auch Kapitel 1.2.3.
[50] Uelzen, 2018, S. 4.

Zahlzeichen für die zweite Stelle einmal verwendet worden, wird die Zahl nach dem gleichen Vorgehen wieder um eine Ziffer erweitert. Den beiden Nachteilen des kardinalen und des ordinalen Prinzips kann somit ausgewichen werden.[51]

Dadurch, dass der Wert einer Ziffer nicht nur von ihrem Symbol, sondern auch ihrem Stellenwert abhängt, können auch grössere Zahlen mit einem begrenzten Vorrat an Zahlzeichen dargestellt werden. Durch Veränderung der Position innerhalb der Zahl kann man den Wert einer Ziffer exponentiell vergrössern. Im Dezimalsystem beträgt der Wert der ersten Stelle 1, derjenige der zweiten 10, der der dritten 100 und so weiter. Zudem hängt die Anzahl erforderlicher Stellen einer Zahl nicht linear von der Grösse der Zahl ab, wie es bei der kardinalen Zahlendarstellung, auch *Additionssystem* genannt, der Fall ist. Um die Zahl eins darzustellen, braucht man dabei ein Symbol, um die Zahl zehn darzustellen 10 Symbole. Stattdessen stehen die Anzahl Stellen bei einem polyadischen Zahlensystem in einem logarithmischen Zusammenhang mit der Grösse der Zahl.[52] Um die neunzig Zahlen von 10 bis 99 abzubilden, braucht man für jede Zahl jeweils zwei Ziffern, mit jeweils drei Ziffern kann man jedoch schon die nächsten neunhundert Zahlen darstellen.

Das wahrscheinlich erste schriftliche Stellenwertsystem findet seinen Ursprung bei den Babyloniern anfangs des zweiten Jahrtausends v. Chr. und beruht auf dem sumerischen Zahlsystem mit der Basis 60.[53] Evidenz hierfür bieten einige durch Ausgrabungen entdeckte Tafeln wissenschaftlichen und vor allem mathematischen Inhalts, die im heutigen Irak seit Mitte des letzten Jahrhunderts gefunden wurden.[54]

Der entscheidende Faktor bei der unterschiedlichen Ausprägung von Zahlensystemen verschiedener Völker ist, dass die Wahl der *Basis*, der Grösse des Repertoires der verfügbaren Symbole oder Zahlziffern, nicht immer gleich ausgefallen ist.[55] Die Basis gibt an, wie oft oder nach wie vielen Zählschritten die darzustellende Zahl um eine zusätzliche Stelle erweitert werden muss, weil die verfügbaren Symbole bereits aufgebraucht sind. Welche Basis von der jeweiligen Kultur gewählt wurde, hängt oft nicht von mathematischen Bedingungen, sondern vom natürlichen und historischen Hintergrund ab, beispielsweise ob und wie viele Hände und Finger sie zum Zählen benutzen.[56]

1.3.3 Geometrie

Die euklidische Geometrie befasst sich mit räumlichen Figuren, den Körpern, wie Kugeln oder Würfeln, und nicht-räumlichen Figuren wie Punkten, Geraden oder Vielecken sowie deren Abmessungen und Beschreibungen.[57] Die wichtigsten Entdeckungen dieser Geometrie werden grösstenteils dem griechischen Mathematiker Euklid (3. Jh. v. Chr.) zugeschreiben.[58] Erst im 19. Jahrhundert begannen Mathematiker:innen, Euklids Ideen zu hinterfragen und sich von der durch die westliche Wissenschaft seit rund 2000 Jahren vertretenen Auffassung der Allgemeingültigkeit der euklidischen Geometrie zu lösen.[59] Auch andere Kulturen kannten und kennen Methoden, bei denen Punkte, Formen und Körper mathematisch in einen Zusammenhang gebracht werden. Ein berühmtes Beispiel ist die *Sona-Geometrie* der Bantu-Völker aus dem Süden Zentralafrikas.[60] Die Sona sind symmetrische Muster, meistens aus einer einzigen, ununterbrochenen Linie, welche gitterförmig angelegte Punkte umfasst. Mit dem

[51] Siehe auch Kapitel 1.2.3.
[52] Uelzen, 2018, S. 4.
[53] Ifrah, 1986, S. 411.
[54] Ebd., S. 412.
[55] Ifrah, 1986, S. 53-75.
[56] Ebd.
[57] “Geometrie einfach erklärt”, 2023.
[58] Ebd.
[59] “Nichteuklidische Geometrie”, 2010.
[60] Wussing, 2008, S. 21.

«geometrischen Algorithmus», der hinter diesen Mustern steht, hat sich unter anderem Paulus Gerdes in seinem Beitrag zur Ethnomathematik befasst.[61]

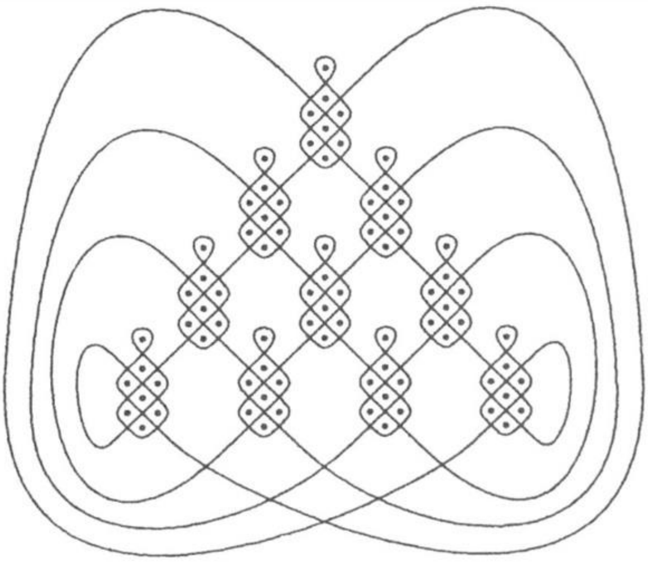


Abb. 3: Sona; «zehn Vögel»[62]

1.3.4 Rechenverfahren

Während die Rechenarten des Zusammenzählens und Abziehens von Zahlen mithilfe der Finger oder anderer Hilfsmittel schon in der frühen Steinzeit in einigen Kulturen verbreitet waren,[63] ergänzten beispielsweise die altägyptische und die babylonische Mathematik die Rechenmethoden auf die vier heute bekannten *Grundrechenarten*: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Das Verständnis und die Definitionen der Rechenarten haben sich im Verlauf der Geschichte ständig verändert und wurden mit dem stetig wachsenden mathematischen Wissen auch immer wieder erweitert. Anhand dieser vier Merkmale – Zahlensystem, Zahlschrift, Geometrie und Rechenverfahren – kann eine Erscheinungsform der Mathematik charakterisiert und diese Charakteristiken im Sinne eines historischen Vergleichs durch den geschichtlichen Hintergrund erklärt und hergeleitet werden.

1.4 Hochkulturen

Der Begriff der Kultur erweist sich trotz seines häufigen Gebrauchs als nur schwer zu definieren. Folgendes Zitat nach Ansgar Nünning (*1959) formuliert eine ansatzweise allgemein gültige Definition des Begriffs:

> *Im weitesten Sinne meint "Kultur" [...] die vom Menschen durch die Bearbeitung der Natur mithilfe von planmäßigen Techniken selbst geschaffene Welt der geistigen Güter, materiellen Kunstprodukte und sozialen Einrichtungen.*[64]

Dieser Begrifft umfasst die Gesamtheit der vom Menschen hervorgebrachten sozialen Umgangsformen, das heisst die typischen Arbeits- und Lebensformen, Denk- und Handlungsweisen und

[61] Wussing, 2008, S. 22.
[62] Ebd, nach: Gerdes, 1997, S. 235.
[63] Wussing, 2008, S. 79.
[64] Nünning, 2009.

Wertvorstellungen einer Gemeinschaft.[65] Die für die Entwicklung der Mathematik ausschlaggebenden Merkmale der in dieser Arbeit untersuchten Kulturen werden grob in drei Gruppen unterteilt.

Mit *geografisch-biologischen Faktoren* sind Einflüsse gemeint, die von natürlichen geografischen Gegebenheiten eines Ortes, beobachtbaren astronomischen Ereignissen oder von natürlichen anatomischen Gegebenheiten des menschlichen Körpers ausgehen und die den Menschen in seinem Tun und Handeln beeinflussen. *Soziokulturelle Faktoren* sind einflussnehmende Aspekte des sozialen Zusammenlebens des Menschen in Gemeinschaften, wie beispielsweise sozialen Strukturen, Bräuche oder Wertvorstellungen.[66] Als *politisch-wirtschaftlichen Faktoren* werden Einflüsse bezeichnet, die einerseits vom organisierten Staatswesen und Militär ausgehen, andererseits den Menschen auch aufgrund wirtschaftlicher Gegebenheiten beeinflussen.

Ebenso schwierig wie den Begriff der Kultur zu definieren, ist es, die Definition einer *Hochkultur* konkret zu formulieren. Nach dem Ethnologen Horst Nachtigall (1924-2013) werden Kulturen, welche sich durch eine eigene Schrift oder Literatur auszeichnen, als Hochkultur angesehen. Überdies gehören eine ausgebildete Technologie und ein daraus resultierender, reicher materieller Besitz, Städte als Aktionszentren, eine verwaltende Staatsform sowie oftmals eine hierarchische Gesellschaftsform zu den Voraussetzungen für eine Hochkultur.[67] Eigenschaften wie weitreichende technologische Kenntnisse oder eine ganzheitliche staatliche Organisation erfordern ein rudimentäres mathematisches Grundwissen. Deshalb ist es gerechtfertigt davon auszugehen, dass sich grundsätzlich alle Hochkulturen in gewisser Weise mit Mathematik auseinandergesetzt haben.

Von den als Hochkulturen angesehenen, komplexen Völkern[68] haben einige einen nicht unwichtigen Beitrag zur Entwicklung der Mathematik geleistet. Diesbezüglich zu nennen sind die Kulturen des asiatischen Raumes: China, vor allem zur Zeit der Song-Dynastie, Japan während der Edo-Zeit und Indien mit seiner mathematischen Blütezeit vom 5. bis 12 Jahrhundert n. Chr. Auch die Hochkulturen des Vorderen Orients, namentlich Ägypten sowie Mesopotamien beziehungsweise Babylonien, nahmen mit der Entwicklung ihrer mathematischen Fähigkeiten einen grossen Einfluss auf die Mathematik als Ganzes. Während der Antike war Griechenland ein Zentrum des mathematischen Denkens, welches die Mathematik stark prägte und beeinflusste. Später trugen auch islamische Gelehrte einen wichtigen Teil zu den mathematischen Kenntnissen und Methoden bei. Dank islamischer Quellen wurden dieses mathematische Wissen während der Renaissance von Europa wiederentdeckt und weiterentwickelt. Ausserdem besassen meso- und südamerikanische Kulturen wie die Azteken, Maya und Inka ebenfalls herausragendes mathematisches Wissen, auch wenn diese Völker zeitlich und vor allem räumlich von europäischen und asiatischen Kulturen getrennt waren.[69]

Zwei dieser mathematischen Hochkulturen, das alte Ägypten und die Maya-Kultur, werden in den folgenden Kapiteln näher betrachtet. Diese beiden Kulturen sind sowohl räumlich als auch, im Hinblick auf ihre jeweilige Blütezeit, zeitlich voneinander getrennt und haben sich vermutlich nicht gegenseitig beeinflusst. Aufgrund ihrer Unterschiede eignen sie sich dementsprechend laut Bloch für einen historischen Vergleich.[70]

1.4.1 Das alte Ägypten

Der Beginn der ägyptischen Hochkultur liegt 5000 Jahre zurück.[71] Der Prozess der Domestizierung von Vieh und der Anbau von Getreide am Nilufer begann aber erst im 3. Jahrtausend v. Chr. Im *alten Reich*,

[65] Ebd.
[66] Pflanz, 1973, S. 69.
[67] Nachtigall, 1960, S. 4.
[68] Siehe auch Kapitel 1.3.
[69] Wussing, 2008, S. XI-XIII.
[70] Siehe auch Kapitel 1.1.
[71] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Wussing, 2008, S. 104-107.

der Zeit von ca. 2700-2170 v. Chr. wurden die berühmten Pyramiden von Gizeh gebaut. Während dieses Zeitraums wurde das Reich von den Pharaonen regiert, welche als Stellvertreter der Götter angesehen und dementsprechend verehrt wurden.

Nach dem Zerfall dieses alten Reichs, welcher durch die Machtzunahme provinzialer Fürsten herbeigeführt wurde, begann die Zeit des *mittleren Reichs*.[72] Dieses dauerte bis etwa 1790 v. Chr. an und ist aufgrund der vorherrschenden Stabilität und des wirtschaftlichen Wachstums auch als das goldenen Zeitalter Ägyptens bekannt. In dieser Zeit entstanden Papyri, die auf die Mathematik im alten Ägypten verweisen.

Nach einem zweiten Zerfall befand sich das Reich in den Jahren 1550-1070 v. Chr. mit der grössten militärischen Ausdehnung auf dem Höhepunkt seiner Macht.[73] Diese Zeit wird auch *neues Reich* genannt. Nach Jahrhunderten unter fremder Herrschaft folgte anschliessend die *Spätzeit*, welche von 664-332 v. Chr. dauerte, und in welcher das alte Reich zum künstlerischen Vorbild wurde, was zu einer Art «Renaissance» führte. Im Jahr 332 v. Chr. endet die Zeit der Königsdynastien mit der Eroberung durch Alexander den Grossen und der Herrschaft der Ptolemäer und anschliessend der Römer.

Die wesentlichen Quellen, welche auf die Mathematik des alten Ägypten verweisen, sind die Papyri *Rhind*, *Moskau*, *Kairo* und die *Londoner Lederrolle*.[74] Das sind mathematische Texte, die auf aus dem Mark der Papyrusstaude gewonnenen Blättern niedergeschrieben sind und praktische Berechnungen dokumentieren und erklären. Diese Papyri wurden allesamt während der Zeit des mittleren Reichs verfasst, weshalb die heutige Forschung eigentlich nur eine Momentaufnahme der ägyptischen Mathematik kennt.[75] Die Schreiber im alten Ägypten nutzten die Mathematik, um staatliche Angelegenheiten zu verwalten und waren in der Lage, Berechnungen über den jährlichen Zyklus der Nil-Überschwemmung anzustellen.[76]

Das Zahlsystem war als additives Dezimalsystem aufgebaut; jeder Zehnerpotenz wurde ein eigenes Schriftzeichen zugeordnet, das, mit einer der Grösse der Zahl entsprechenden Häufigkeit abgebildet wurde.[77] Die ägyptische Mathematik kannte die einfache Addition und Subtraktion sowie eine vereinfachte Form der Multiplikation und Division.[78] Zudem wurden sowohl Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken, Dreiecken, Trapezen und (annäherungsweise) Kreisen als auch solche zur Berechnung des Volumens von Würfeln, Quadern, Zylindern und Pyramiden verwendet.[79]

1.4.2 Die Maya-Kultur

Eine weitere Kultur, welche Pyramiden erbaut und sich mit der Mathematik dahinter beschäftigt hat, waren die Maya. Die Gruppe der mesoamerikanischen Völker, die zusammenfassend als Maya bezeichnet werden und deren Grösse heute ungefähr 2 Millionen Menschen beträgt, entwickelte sich seit etwa 2000 v. Chr. im Süden des heutigen Mexikos.[80] Der Zeitpunkt der höchsten kulturellen Entfaltung wird auf etwa 500 n. Chr. datiert, also lange bevor Kolumbus in Amerika eintraf. Einige der grandiosen Bauwerke der Mayas, wie Städte, Tempelanlagen und Pyramiden, wurden erst im 20. Jahrhundert entdeckt. Das Reich der Mayas bildete einen Zusammenschluss aus 150 Stadtstaaten unterschiedlicher Grösse, die von ländlicher Bevölkerung umgeben waren und untereinander teilweise militärische Auseinandersetzungen austrugen. Gegen Ende des 10. Jahrhunderts wurde die Maya-Kultur von den aus ihren

[72] Ebd.
[73] Ebd.
[74] Wussing, 2008, S. 121.
[75] Ebd., S. 113.
[76] Ebd., S. 111.
[77] Wussing, 2008, S. 114.
[78] Siehe auch Kapitel 2.3.4.
[79] Wussing, 2008, S. 121.
[80] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Wussing, 2008, S. 28f.

ursprünglichen Wohnsitzen vertriebenen und in die Maya-Gebiete eingewanderten *Tolteken* beeinflusst. Unter diesem Einfluss wurde zwar die Kunst reichhaltiger, die Religionszeremonien jedoch grausamer. Historiker:innen sprechen vom folgenden, 200 Jahre anhaltenden Frieden auch als «Zeit der Maya-Tolteken-Kultur». Die Maya zeichneten sich unter anderem durch ihre bemerkenswerten astronomischen Kenntnisse aus.

Bedauerlicherweise wurden die allermeisten schriftlichen Zeugnisse der Maya unter dem fanatischen Bekehrungseifer der spanischen Konquistadoren und Kolonisatoren zerstört.[81] Der *Dresdner Kodex*, der *Madrider Kodex* und der *Pariser Kodex* sind die einzigen authentischen Handschriften der Maya, welche bis heute erhalten geblieben sind.[82] Das von den Maya verwendete Zahlsystem war ein Vigesimalsystem, das heisst ein Zahlensystem mit der Basis 20. Die meisten mesoamerikanischen Kulturen verwendeten ein Vigesimalsystem, unter anderem die Olmeken.[83] Die Zahlen 1 bis 19 wurden als Kombinationen von Punkten und Strichen dargestellt, wobei ein Punkt für eine Einheit und ein Strich für fünf Einheiten stand.[84] Zudem gab es für einige Zahlen auch Ziffern in der Form von Götterköpfen.[85] Die weiteren Stellen des Vigesimalsystems entsprachen aber nicht den Potenzen von 20, sondern den mit 18 multiplizierten Potenzen, also $18 \cdot 20$, $18 \cdot 400$ und so weiter, weshalb das Zahlensystem der Maya als ein *unreines* Vigesimalsystem bezeichnet wird.[86] Die Zahlschrift der Maya ermöglicht eine vergleichsweise einfache Addition und Subtraktion der Zahlen bis 20.[87] Die planmässige architektonische Organisation der Städte, Tempel und Pyramiden lassen auf geometrische Grundkenntnisse schliessen.[88]

1.5 Untersuchungsfragen

Von verschiedenen Historiker:innen wurden bereits die Entstehung einzelner Aspekte der Mathematik, wie beispielsweise die Notation von Zahlen, sehr gründlich und unter Berücksichtigung der meisten heute bekannten Kulturen untersucht. Beispiele dafür sind die Werke von George Ifrah oder Stephen Chrisomalis (*1974).[89] Eine potenzielle Forschungslücke besteht jedoch darin, nicht nur mehrere mathematische Aspekte der Kulturen der Maya und des alten Ägyptens zu vergleichen, sondern auch aufzuzeigen, inwiefern diese Ausprägungen mit dem kulturellen Hintergrund vernetzt sind oder mit diesem begründet werden können.

Angesichts des zuvor erläuterten geschichtlichen Hintergrunds der Kultur der Maya und derjenigen Ägyptens, der Theorie des historischen Vergleichs und der grundlegenden Kenntnisse über den mathematischen Fortschritt der beiden Kulturen und dessen Charakterisierung ist das Fundament für besagten historischen Vergleich gelegt. Dieses theoretische Vorwissen führt zur folgenden historisch-vergleichenden Leitfrage, die im Rahmen dieser Maturitätsarbeitet beantwortet werden und folglich die entsprechende Forschungslücke schliessen soll: Inwiefern können sowohl unterschiedliche als auch ähnliche Ausprägungen der mathematischen Fähigkeiten der Ägypter und der Maya historisch erklärt und begründet werden?

Um die Leitfrage zu präzisieren, werden weitere Untersuchungsfragen gestellt:

1. Inwiefern unterscheiden beziehungsweise ähneln sich die mathematischen Kenntnisse der alten Ägypter und der Maya zum Zeitpunkt ihrer jeweils höchsten kulturellen Entfaltung?

[81] Wussing, 2008, S. 30.
[82] Ebd., S. 31.
[83] "Maya-Zahlschrift", 2022.
[84] Wussing, 2008, S. 30.
[85] Ebd.
[86] Ebd.
[87] "Maya numerals", 2023.
[88] Wussing, 2008, S.28.
[89] Chrisomalis, 2003.

2. Welche geografisch-biologischen Gegebenheiten haben die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya beeinflusst?

3. Welche soziokulturellen Gegebenheiten haben die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya beeinflusst?

4. Welche politisch-wirtschaftlichen Gegebenheiten haben die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya beeinflusst?

5. Inwiefern wurden die mathematische Entwicklung und Innovation der alten Ägypter und der Maya von Nachbarkulturen und Kontakten zu anderen Zivilisationen beeinflusst?

1.6 Thesen und Hypothesen

Ausgehend von den schriftlichen Zeugnissen, die heute noch erhalten sind, lässt sich vermuten, dass beide Kulturen sowohl einfache Formen der vier Grundrechenarten kannten als auch grundlegende Kenntnisse über die Geometrie besassen.[90] Jedoch ist es aufgrund der grossen Vielfalt an Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen und der räumlichen und zeitlichen Trennung eher unwahrscheinlich, dass sich die verwendeten schriftlichen Zahlzeichen des alten Ägyptens und der Maya ähneln. Des Weiteren weisen die verfügbaren Quellen auf Zahlensysteme unterschiedlicher Basis hin, weshalb auch in diesem Punkt nicht von einer erkennbaren Ähnlichkeit ausgegangen wird.[91] Daraus kann folgende erste These abgeleitet werden:

1. These: Die mathematischen Kenntnisse der Maya und der alten Ägypter unterscheiden sich in der Wahl der Zahlzeichen und Zahlensysteme. Die Kenntnisse ähneln sich bezüglich Rechenarten und Geometrie.

Es wird angenommen, dass die Ägypter mathematische und astronomische Methoden zur Zeitrechnung entwickelten, um die jährlichen Nil-Überflutungen zu verstehen und sich darauf vorbereiten zu können.[92] Somit konnten sie effizienteren Anbau von Lebensmittel betreiben. Auch die bemerkenswerten astronomischen Kenntnisse der Maya erforderten vermutlich ein Fundament an mathematischen Fähigkeiten. Des Weiteren ist es in Anbetracht der heute noch gut erhaltenen architektonischen Bauten der Maya und der Ägypter denkbar, dass beide Kulturen auf mathematischen Grundlagen basierende Methoden und Techniken zur Landvermessung und Organisation der geografischen Ressourcen entwickeln mussten.

2. These: Sowohl die jeweilige Zeitrechnung als auch der Umgang mit geografischen Gegebenheiten beeinflussten die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya.

Die Architektur und Konstruktion der heute noch erhaltenen Tempelanlagen der Ägypter und Maya erforderte vermutlich praktische mathematische Methoden und Fähigkeiten. Mathematische Erkenntnisse waren den Schreibern und Gelehrten vorbehalten, weshalb diese Schichten die Entwicklung der Mathematik wahrscheinlich am meisten beeinflusst haben. Zudem ist es denkbar, dass die Religion das Verständnis und die Vorstellung über die Mathematik geprägt hat, was beispielsweise bei der Zifferndarstellung durch Götterköpfe bei den Maya der Fall war.[93]

[90] Ifrah, 1986, S. 79; “Maya numerals”, 2023; Wussing, 2008, S. 121; Ebd., S. 28.
[91] “Maya-Zahlschrift”, 2022; Wussing, 2008, S. 114.
[92] Wussing, 2008, S. 111.
[93] Ebd., S. 30.

3. These: Die Architektur, die Religion und die Struktur der sozialen Schichten beeinflussten die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya.

Ein weiterer Faktor, der zur Entwicklung der Mathematik beigetragen hat, ist möglicherweise die Organisierung von Handel und wirtschaftlichem Wachstum, einem für das mittlere Reich des alten Ägyptens charakteristischen Attribut.[94] Schliesslich erforderte die Kontrolle über Waren und Zahlungsmittel sehr wahrscheinlich grundlegende mathematische Kenntnisse. Ein anderes, für die Entwicklung der Mathematik wesentliches Merkmal ist vermutlich die Organisation der staatlichen sowie der militärischen Institutionen und der Bürokratie. Da beispielsweise die staatlichen Schreiber im alten Ägypten die mathematischen Papyri als Nachschlagewerk für Berechnungen nutzten,[95] wird davon ausgegangen, dass mathematische Methoden und Fähigkeiten sich den Bedürfnissen der organisatorischen Bürokratie angepasst haben und dadurch beeinflusst wurden.

4. These: Der Handel und die Organisation der staatlichen und militärischen Bürokratie beeinflussten die Entwicklung der Mathematik der alten Ägypter und der Maya.

Sowohl die Basis[96] 20 als auch die Zahlendarstellung mithilfe von Strichen und Punkten findet bei den meisten mesoamerikanischen Kulturen Verwendung.[97] Anhand dieser Gemeinsamkeiten kann davon ausgegangen werden, dass die Entwicklung der mathematischen Methoden und Fähigkeiten der Maya durch den Kontakt mit anderen Kulturen beeinflusst wurde. Anders als bei den mesoamerikanischen Kulturen gibt es vermutlich keine naheliegenden oder prägenden Einflüsse von Nachbarkulturen auf die ägyptische Mathematik. Daher wird angenommen, dass die mathematischen Methoden der Ägypter sich vergleichsweise eigenständig herausgebildet haben und wenig von anderen Kulturen beeinflusst wurden.

5. These: Während die Maya-Mathematik stark durch den Einfluss von Nachbarkulturen geprägt wurde, hat sich die ägyptische Mathematik eigenständig entwickelt.

[94] Ebd., S. 106; Siehe auch Kapitel 1.4.1.
[95] Ebd., S. 128; Siehe auch Kapitel 1.4.1.
[96] Siehe auch Kapitel 1.3.2.
[97] “Maya-Zahlschrift”, 2022; Siehe auch Kapitel 1.4.2.

2 Material und Methode

Zur Beantwortung der Untersuchungsfragen wurden nach dem Studium von Fachliteratur verschiedener Autor:innen relevante Informationen und Aussagen herausgefiltert, kontextualisiert und zusammenfassend wiedergegeben. Die Auseinandersetzung mit Werken von verschiedenen Autor:innen diente der Qualitätssicherung, da sich überschneidende Informationen grundsätzlich vertrauenswürdiger sind. Dabei wurden die Ausprägungen der mathematischen Kenntnisse der Ägypter und der Maya untersucht, wobei der Fokus auf den vier in den Kapiteln 1.3.1-1.3.4 beschriebenen Charakteristiken liegt: Zahlensystem, Zahlschrift, Rechenverfahren und Geometrie. Dabei wurde versucht, die gewonnenen Erkenntnisse jeweils spezifisch einer dieser Kategorien zuzuordnen, um die Untersuchungsergebnisse möglichst einheitlich und nicht unnötig kompliziert dokumentieren zu können.

2.1 Methode

Die Ergebnisse der Untersuchung besagter Charakteristiken in Bezug auf die Mathematik der alten Ägypter und der Maya bildeten die Grundlage für den historischen Vergleich. Für die praktische Umsetzung des historischen Vergleichs wurde der verstehende Vergleich als Methode gewählt. Der *verstehende Vergleich*[98] (auch *Macro-Causal Analysis* oder *Makroanalyse*)[99] orientiert sich am multivariaten Verfahren. Das heisst, mehrere Variablen werden gleichzeitig und miteinander im Zusammenhang stehend untersucht.[100] Dieser Vergleich orientiert sich an den Vergleichslogiken nach Mill.[101] Einerseits können das zu untersuchende Phänomen und die vermuteten kausalen Faktoren übereinstimmen (Methode der Übereinstimmung). Andererseits können auch grundsätzlich ähnliche Fälle verglichen werden, bei denen Phänomen und Faktoren fehlen (Methode der Differenz). Makroanalysen resultieren idealerweise in einer Verknüpfung von kausalen Beziehungen in einem grösseren Kontext, der Makro-Ebene.[102]

Der verstehende Vergleich (Makroanalyse) wurde als Methode gewählt, da versucht wurde, die unterschiedlichen Ausprägungen der mathematischen Methoden und Fähigkeiten anhand des kompletten kulturellen Hintergrunds zu begründen. Im Sinne eines verstehenden Vergleichs wurden somit mehrere Variablen gleichzeitig und in Zusammenhang stehend untersucht. Jede der vier verschiedenen untersuchten Kategorien der Mathematik wurde dabei einzeln verglichen. Somit gab es bei den zu untersuchenden Einheiten «ägyptische Mathematik» und «Maya-Mathematik» sowohl übereinstimmende als auch differierende Phänomene, die historisch begründet werden konnten. Zusätzlich wären auch die folgenden zwei, dem klassischen Sinn des Vergleichs nachkommenden,[103] Methoden für die Ausführung dieses Untersuchs möglich gewesen.

Der *analytische Vergleich*[104] (auch *Parallel Demonstration of Theory* oder *Parallele Methode*)[105] untersucht verschiedene Einzelfälle und setzt sich zum Ziel, die Gültigkeit einer bestimmten theoretischen Annahme zu überprüfen. Er sucht die Erklärung für ein historisches Phänomen durch vergleichende Analyse mehrerer unterschiedlicher historischer Fallbeispiele und sucht so nach Gemeinsamkeiten, die die allgemeine Gültigkeit einer Theorie belegen.[106]

98 Kaelble, 2012.
99 Häusler, 2009.
100 "Multivariate Verfahren", 2022.
101 Siehe auch Kapitel 1.1.
102 Häusler, 2009.
103 Siehe auch Kapitel 1.1.
104 Kaelble, 2012.
105 Häusler, 2009.
106 Ebd.

Der *kontrastive Vergleich*[107] (auch *Contrasts of Contexts* oder *Kontrastorientierte Methode*)[108] ermittelt einzigartige Unterschiede zwischen bestimmten Einzelfällen und untersucht deren Einfluss auf die soziale Entwicklung. Die Wahl der Einzelfälle fällt dabei auf sehr unterschiedliche Fallbeispiele, die sich durch möglichst exklusive historische Besonderheiten auszeichnen, was das Definieren von Vergleichskriterien vereinfacht. Beim kontrastiven Vergleich wird nicht unbedingt nach neuen allgemein gültigen Theorien gesucht, sondern der Schwerpunkt wird eher auf die Überprüfung bereits bestehender Theorien gelegt.[109]

Für eine Arbeit in diesem Rahmen hat sich jedoch weder ein analytischer noch ein kontrastiver Vergleich geeignet. Ein analytischer Vergleich wäre unpassend gewesen, da die Anzahl der zu untersuchenden Fälle zu gering war, um aufgrund der Ergebnisse eine allgemein gültige Theorie aufzustellen. Aufgrund der historischen Kontingenz darf diesbezüglich streng genommen ohnehin nicht von einer allgemein gültigen Theorie gesprochen werden.[110] Auch ein kontrastiver Vergleich hätte nicht den Anforderungen entsprochen. Denn das Ziel dieser Arbeit war es nicht, generalisierende Theorien zu bestätigen, sondern spezifisch die Mathematik der alten Ägypter und der Maya zu untersuchen.

Um die Unterschiede, Gemeinsamkeiten, Annäherungen und Auseinanderentwicklungen[111] zu begründen, wurden die wesentlichen Merkmale der Kulturen konkretisiert und einander in passenden Kategorien gegenübergestellt. Nach dem Studium verschiedener Kulturen[112] ergaben sich die weiter unten angeführten Kriterien, um den kulturellen Hintergrund einer Gemeinschaft festzumachen. Diese Kriterien stehen jeweils stellvertretend für einen bestimmten Teilaspekt der Kultur. Oftmals können sie in einen direkten Zusammenhang mit der Mathematik gebracht werden. Die Formulierung der folgenden Kriterien diente dazu, die in Kapitel 1.4 definierten und in den Untersuchungsfragen aufgegriffenen Begriffe *geografisch-biologisch*, *soziokulturell* und *politisch-wirtschaftlich* zu konkretisieren und in zugänglichere Kategorien zu unterteilen. Trotz der auf ein sinnvolles Maximum beschränkten Anzahl und der verhältnismässig offenen Formulierung der Untersuchungsfragen konnten so die einzelnen Teilaspekte dennoch sehr genau und tiefgründig untersucht werden.

Religion und Wertesystem: In vielen Kulturen nahmen übernatürliche Wesen - nicht nur in einem religiösen Zusammenhang - eine wichtige Rolle ein. Auch alltägliche Ereignisse und Gegenstände wurden von göttlichen Vorstellungen und religiösen Überzeugungen beeinflusst. Ein Beispiel dafür ist die Zahldarstellung der Maya.[113] Die individuelle religiöse Ausprägung und die ethischen Ansichten einer Kultur sind einzigartig und bieten somit ein ideales Vergleichskriterium.[114]

Architektur und Bautraditionen: Hochkulturen unterscheiden und ähneln sich gleichzeitig in ihrer Architektur. Beispielsweise errichteten sowohl die Ägypter als auch die Maya pyramidenförmige Bauten. Die Mathematik spielte dabei einerseits bei der Berechnung der Baustatik eine erhebliche Rolle. Andererseits hängt die Umsetzbarkeit eines Gebäudes auch von der räumlichen Formgebung und dem zu Verfügung stehenden Platz und Baumaterial ab.[115]

Soziale Strukturen und Bräuche: Sowohl die Maya als auch die Ägypter bildeten in ihrer jeweiligen hierarchisch strukturierten Gesellschaft eine Gruppe Gelehrter, die sich mit der Mathematik und ihren komplizierten Regeln auseinandersetzten. Die Anforderungen und Gewohnheiten dieser Gruppen haben die Entwicklung der Mathematik vorangetrieben und zu einem alltäglichen Werkzeug gemacht.

[107] Kaelble, 2012.
[108] Häusler, 2009.
[109] Ebd.
[110] Siehe auch Kapitel 1.1.
[111] Ebd.
[112] Wussing, 2008, S. 23-142.
[113] Siehe auch Kapitel 1.4.2.
[114] Siehe auch Kapitel 1.1.
[115] “Mathematik und Architektur”, 2012.

Landwirtschaft und Ressourcennutzung: Die Gewinnung und die geeignete Lagerung von Lebensmitteln und weiteren notwendigen und alltäglichen Gegenständen setzt eine gut organisierte Infrastruktur voraus. Auch effiziente räumliche Anordnungen von Tempelanlagen, Wohngebäuden und Getreidefeldern benötigen je nach geografischen Gegebenheiten eine überlegte Organisation. Die Mathematik zeigte sich als nützliches Mittel, das bei richtiger Anwendung zu besagter Organisation führt.[116]

Astronomie und Zeitrechnung: Die Maya-Kultur zeichnete sich durch eine fortschrittliche Astronomie und Zeitrechnung aus.[117] Auch andere Hochkulturen entwickelten mathematische Methoden, um beispielsweise die periodische Dauer der Erdumlaufbahn um die Sonne - die Länge eines Jahres - zu berechnen. Unter anderem konnten die Ägypter so den jährlichen Zeitpunkt der Nilüberschwemmung sowie den richtigen Zeitraum für Aussaat und Ernte bestimmen.[118]

Staatswesen und Militär: Ähnlich der Lagerung ist auch ein erfolgreiches Kriegswesen von seiner strukturierten Organisation abhängig. Taktiken und Formationen sowie die Bestimmung der Siegeschancen erfordern angewandte mathematische Fähigkeiten. Gleichzeitig spielt es für die Erhaltung einer stabilen Staatsgewalt eine Rolle, ob und wie effizient der Staatsapparat organisiert ist.

Wirtschaft und Kommunikation: Der Handel und der Austausch mit anderen Völker setzen Organisation und Infrastruktur voraus. Die Berechnung von Tauschkursen und Warenpreisen, aber auch Risikobewertungen sind direkt oder indirekt von der Mathematik abhängig.

Anschliessend wurden für die Ausprägungen jedes Charakteristikums jeweils Erklärung und Begründungen in jeder der oben genannten Kategorien gesucht. Beispielsweise wurden Symbole der Zahlnotation untersucht und charakterisiert, woraufhin mögliche Ursprünge und Vorbilder dieser mathematischen Symbole in alltäglichen Gegenständen gesucht wurden. Auf eine ähnliche Weise wurden mathematische Regeln und Vorgehensweisen konkretisiert und anschliessend wurde versucht, diese auf nichtmathematische Prozesse und Gesetze zurückzuführen. Dabei wurden also die Wurzeln der abstrakten Mathematik in der konkreten, alltäglichen Welt der Maya und der alten Ägypter gesucht.

So wurde versucht, alle kulturellen Faktoren aufzulisten, die eine Erscheinungsform möglicherweise geprägt haben könnten. Anhand dieser Liste konnten einflussreiche Faktoren der Mathematik der alten Ägypter und der Maya verglichen und alle Untersuchungsfragen beantwortet werden. Allerdings muss beachtet werden, dass die Einteilung der Merkmale einer Kultur in die oben genannten Kategorien nur eine Vereinfachung ist. Überschneidungen zwischen den Kategorien sind möglich und oft sind verschiedene kulturelle Aspekte miteinander verflochten und beeinflussen sich gegenseitig. Im Hauptteil dieser Arbeit wurden die Thesen in einzelne Aspekte untergliedert. Diese Aspekte wurden unabhängig voneinander untersucht und die These bestätigt oder widerlegt.

Die in dieser Untersuchung verwendete Methode ist qualitativer Natur, da nicht-messbare Daten und Informationen wie historische Hintergründe und Gegebenheiten untersucht wurden. Im Sinne einer qualitativen Untersuchung wurden diese Daten anschliessend interpretiert und in einen grösseren Kontext eingebettet. Diese Maturaarbeit hat nicht die Absicht, eine messbare, statistisch repräsentative Stichprobe zu präsentieren, sondern ein tieferes Verständnis zweier konkreter Einzelfälle.

2.2 Material

Für die Recherche und Analyse der Mathematik der Ägypter und der Maya wurde unterschiedliche Literatur herangezogen. Für ein tieferes Verständnis war es sinnvoll, sich direkt mit Primärquellen, originalen Schriftstücken, die von der Kultur selbst verfasst wurden, auseinanderzusetzen. Dazu boten sich

[116] Wussing, 2008, S. 114.
[117] Wussing, 2008, S. 32.
[118] Ebd., S. 111.

sowohl ägyptische Papyri als auch die Handschriften der Maya an. Für einen tieferen Einblick hätte es sich gelohnt, diese Primärquellen, gestützt durch bereits erlangte Vorkenntnisse der jeweiligen mathematischen Ausprägung, eigenständig zu interpretieren.

Eine umfassende und detaillierte Analyse der Primärquellen hätte allerdings den Rahmen einer Maturaarbeit gesprengt. Zudem geht es in der vorliegenden Arbeit um einen breit angelegten Vergleich verschiedener Kulturen, welcher ein umfassendes Verständnis der jeweiligen Kulturen und ihrer Merkmale erfordert. Von Expert:innen verfasste Sekundärliteratur, die sich auf Primärquellen bezieht und das bereits vorhandene Wissen zusammenfasst oder auch interpretiert, bot hierfür eine geeignete Grundlage. Da das erforderliche Wissen so nicht nur durch Selbststudien erlangt werden musste, machte es geeignete Sekundärliteratur möglich, den Zeit- und Arbeitsaufwand für diese Untersuchung auf ein einer Maturaarbeit entsprechendes Mass zu begrenzen. Bezüglich der Informationen über den kulturellen Hintergrund des alten Ägyptens und der Maya wurde nur Sekundärliteratur berücksichtigt.

Primärquellen wurden verwendet, um Argumente zu untermauern und sollten ebenfalls verwendet werden, um schrittweise eigene Interpretationsansätze und Erkenntnisse zu erarbeiten. Diese sollten durch Vergleiche mit Werken anderer Autor:innen bekräftigt oder widerlegt werden. Für eine aussagekräftigere Analyse wäre es wichtig, sich unter anderem auch mit möglichst originalen Schriften auseinanderzusetzen. Dadurch hätte einerseits die Arbeit anderer Autor:innen besser nachvollzogen werden können, andererseits hätte auch der möglicherweise lange Weg bis zur allgemein als korrekt angesehenen Interpretation erleichtert und verkürzt werden können. Die selbstständige Interpretation und Erarbeitung von Erkenntnissen zu Primärquellen stellten sich jedoch aufgrund eines Mangels an Zeit und Wissen als nicht möglich heraus.

2.3 Anpassungen der Methode

Nach ersten Untersuchungen von einzelnen Teilaspekten der Mathematik der Ägypter und der Maya stellte sich heraus, dass die gewählte Methode einige Mängel besass. Entsprechend der Formulierungen der Untersuchungsfragen hätten für jeden der sieben Teilaspekte, in die die Kultur unterteilt wurde, Hinweise bezüglich der Einflussnahme auf die mathematischen Fähigkeiten und Methoden der beiden Kulturen gesucht werden müssen. Auch wenn alle sieben Faktoren berücksichtigt wurden, stellte sich heraus, dass nicht alle Faktoren gleich wichtig für die Entwicklung der Mathematik waren. Beispielsweise hatte das Militärwesen vermutlich keinen Einfluss auf die Entwicklung der Zahlschrift der Ägypter oder der Maya.

Anstatt Einflüsse eines einzelnen kulturellen Teilaspekts auf die Gesamtheit der mathematischen Fähigkeiten und Kenntnisse zu untersuchen, wurden nach der Anpassung der Methode in allen Bereichen der Kultur nach Faktoren gesucht, die für die Entwicklung eines einzelnen Charakteristikums der Mathematik, wie beispielsweise des Zahlensystems, bedeutend waren. Somit wurde also nicht untersucht, welche Rolle beispielsweise das Militärwesen für die Entwicklung einzelner Aspekte der Mathematik gespielt hat, sondern anhand welcher Teilaspekte beispielsweise die Ausprägungen der Zahlensysteme begründet werden kann. Dabei konnte von gegebenen Gemeinsamkeiten und Unterschieden ausgegangen werden, wobei der Hauptteil der Untersuchung immernoch darin bestand, diese zu begründen.

Diese Anpassung minderte die Gefahr spekulativer oder gar falscher Interpretationen, da mögliche Einflüsse, auch wenn sie noch so unwahrscheinlich waren, nicht bloss «der Vollständigkeit halber» in die präsentierten Ergebnisse aufgenommen werden mussten. Zudem orientiert sich die angepasste Methode näher an der Vorgehensweise nach der sich auch Historiker:innen bei der Durchführung eines verstehenden Vergleichs richten. Da bereits die ursprüngliche Methode vorsah, die Thesen im Hauptteil in einzelne Aspekte zu untergliedern und diese unabhängig voneinander zu untersuchen, um die Thesen zu bestätigen oder zu widerlegen, mussten diesbezüglich keine Anpassungen unternommen werden.

Jedoch wurden die Unterteilungen der Charakteristiken der Mathematik angepasst. Konkret wurden bei der Untersuchung die geometrischen Fähigkeiten auch die Masseinheiten der beiden Kulturen untersucht. Die Gründe dafür waren einerseits, dass die Geometrie beider Völker eine grosse Rolle bei praktischen Berechnungen von Körpern, Flächen und Längen spielte, deren geometrische Eigenschaften wiederum in den jeweiligen Masseneinheiten angegeben wurden. Somit können die Masseinheiten in diesem Kontext als Teil der Geometrie gesehen werden. Andererseits waren die Ergebnisse beider Aspekte zu gering, als dass sie als eigenständige Charakteristiken in die Untersuchung hätten einfliessen können. Auch der Grund für die Zusammenfassung der beiden Aspekte Rechentechniken und Anwendungen als ein Charakteristikum liegt darin, dass die Rechentechniken grösstenteils in alltäglichen Situationen angewandt wurden und daher gleichzeitig praktische Anwendungen der Mathematik waren.

2.4 Aussagekraft der Ergebnisse und Quellenkritik

Bezüglich der Auswahl der Sekundärliteratur wurde die Reputation und die Glaubwürdigkeit der Autorin oder des Autors beziehungsweise der Institution berücksichtigt. Zudem wurde darauf geachtet, dass sich Inhalte verschiedener Werke überschneiden, beziehungsweise dass das verwendete Material einheitlich und stimmig war. Seriöse Autor:innen mit wissenschaftlichem Hintergrund verweisen üblicherweise auf weitere vertrauenswürdige Quellen, die bei der Recherchearbeit miteinbezogen wurden. Die in dieser Arbeit verwendete Sekundärliteratur ist im Literaturverzeichnis aufgeführt.

Auch wenn Werke verschiedener Autor:innen herangezogen wurden, handelt es sich dabei nur um auf Fakten basierende Interpretationen. Zudem bezog sich die untersuchte Sekundärliteratur auf einen kleinen, jedoch wesentlichen Teil des heutigen Wissensstandes, weshalb man Erkenntnisse mit einer gewissen geschichtswissenschaftlichen Distanz beurteilen muss. Die Aussagekraft der Ergebnisse könnte verbessert werden, wenn mehr Primärquellen zur Verfügung stünden. Vor allem im Fall der Mayas erweist sich dies jedoch als Problem, da mit der spanischen Eroberung Mittelamerikas viele Primärquellen zerstört wurden. Wären die heute erhaltenen Überreste weitreichender, wären Sekundärquellen vermutlich genauer, tatsachengetreuer und in grösseren Mengen vorhanden. Zudem wäre eine Bewertung der Untersuchung und vor allem der formulierten Vermutungen durch Fachexperten förderlich für die Aussagekraft der Ergebnisse.

Die im Rahmen dieser Arbeit aufgestellten Begründungen und Erklärungen für verschiedene Ausprägungen dürfen weder als allgemeingültig noch als Gesetze aufgefasst werden. Es handelt sich dabei einzig um Vermutungen, die zwar durch wissenschaftlich anerkannte Vorarbeit anderer Autor:innen gestützt werden. Jedoch müssen bei der Auswertung der Primärquellen und der Sekundärliteratur allfällige Voreingenommenheit oder politische, wirtschaftliche und ideologische Intentionen seitens der Autorin oder des Autors berücksichtigt werden. Erst ein kritisch hinterfragender Umgang mit Quellen und Argumentationen ermöglichte aussagekräftige und wissenschaftliche Ergebnisse.

3 Resultate und Diskussion

3.1 Das Zahlensystem

Das Zahlensystem der Maya und dasjenige der Ägypter unterscheidet sich in der Wahl der Basis. Während die Maya ein Vigesimalsystem mit der Basis 20 verwendeten,[119] handelt es sich beim ägyptischen Zahlensystem um ein Dezimalsystem oder auch Zehnersystem mit entsprechender Basis 10.[120] Trotz der Verschiedenheit der Basen lässt sich ihr jeweiliger Ursprung aus historischer Sicht stückweise auf das gleiche Szenario zurückführen: Das Zählen und Rechnen mit zwei Händen beziehungsweise zehn Fingern.[121] Georges Ifrah nennt als bedeutsame Eigenschaften der Hände in ihrer Funktion als Zählinstrument einerseits ihren gesamtheitlichen und einheitlichen Charakter und andererseits die natürliche Abfolge der Finger als einzelne Elemente.[122] Auch heute greift man regelmässig auf diese einfache und natürliche Hilfsmenge zurück, nicht zuletzt während dem Lernprozess des Zählens im Kleinkindalter.[123]

Weiterführend lässt sich die Basis 20, die übrigens nicht nur bei den Mayas, sondern auch bei anderen präkolumbianischen Völkern Mittelamerikas wie beispielsweise den Azteken auftritt, darauf zurückführen, dass diese Völker zusätzlich zu den fünf Fingern an jeder Hand auch die fünf Zehen an jedem Fuss zum Zählen verwendeten.[124] Diese Vermutung wird unter anderem dadurch gestützt, dass einige Maya-Dialekte die Zahl zwanzig mit dem Ausdruck *hun uinic* bezeichneten, was wörtlich übersetzt «ein Mann» bedeutet.[125] Die zehn Finger und zehn Zehen eines Mannes bilden eine abgeschlossene Menge, die gleichzeitig auch als grundlegende Einheit mit dem Wert 20 dient. Diese Erkenntnisse bestätigen einerseits die These, dass die biologischen Faktoren eine Rolle in der Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten der beiden Kulturen gespielt haben. Andererseits zeigen sie jedoch auch, dass die Mathematik der Maya vermutlich von den mathematischen Methoden ihrer Nachbarvölker beeinflusst wurde.

Auf die Frage, weshalb die mittelamerikanischen Völker vermehrt ihre Zehen zum Zählen miteinbezogen und deshalb ein Zahlensystem mit Basis 20 benutzten, während sich in anderen Regionen andere Basen durchgesetzt haben, gibt es keine eindeutige Antwort. Ein Vorteil des Vigesimalsystems ist es, einfacher mit grösseren Zahlen umzugehen. Denn für deren Darstellung werden weniger Symbole gebraucht als beispielsweise in einem Zahlensystem mit Basis 10 oder einer anderen kleineren Basis. Das könnte für die äusserst präzisen kalendarischen Berechnungen der Maya von Vorteil gewesen sein.[126] Um eine Million mit beispielsweise arabischen Ziffern darzustellen, werden im Dezimalsystem sieben Symbole beziehungsweise Ziffern benötigt (1'000'000), im Vigesimalsystem jedoch nur fünf (65'000).

Gegen diese Hypothese spricht jedoch, dass astronomische Beobachtungen oder Kalendersysteme anderer Völker, die ebenfalls auf der Basis 20 aufgebaut waren, im Vergleich zu den Maya nicht speziell für ihre überragende Präzision auffallen. Diese Völker konnten also, obwohl sie die vergleichsweise einfache Darstellungsmöglichkeit grosser Zahlen ebenfalls kannten, nicht unbedingt den gleichen praktischen Nutzen daraus ziehen wie es die Maya taten. Diese Tatsache spricht wiederum für die Einzigartigkeit der mathematischen Fähigkeiten der Maya und gegen die These, dass diese von benachbarten Völkern beeinflusst wurden. Umgekehrt gibt es allerdings einige Völker, die ebenfalls genaue Kalender geschaffen und astronomische Beobachtungen gemacht und dokumentiert haben, ohne dabei ein Zehnersystem verwendet zu haben. Ein Beispiel dafür ist der Kalender der Babylonier, welche ein

[119] Wussing, 2008, S. 30.
[120] Ebd., S. 114.
[121] Ifrah, 1986, S. 49.
[122] Ebd.
[123] Ebd.
[124] Ebd., S. 64.
[125] Ebd., S. 65.
[126] Wussing, 2008, S. 32.

Sexagesimalsystem verwendet haben.[127] Somit kann ausgeschlossen werden, dass sich das Zahlsystem der Maya einzig aufgrund der einfacheren Darstellung grösserer Zahlen zu einem Vigesimalsystem statt einem Dezimalsystem entwickelt hat.

So konnte gezeigt werden, dass die Basis sowie die Gründe für deren Wahl im Zahlensystem der Maya und Ägypter deutliche Unterschiede aufweisen. Diese Ergebnisse bekräftigen die These, dass sich die mathematischen Kenntnisse der Ägypter und Maya in der Wahl ihrer Zahlensysteme unterschieden haben. Trotzdem gibt es dennoch bestimmte inhaltliche Strukturen, in denen sich die Bedeutung der Zahl Zehn auch im Vigesimalsystem der Maya äussert, obwohl die Kategorisierung des Zahlensystems der Maya als Vigesimalsystem unter Historiker:innen und Mathematiker:innen allgemein akzeptiert ist. Ein Beispiel dafür ist die Benennung der Zahlen von 1 bis 20. Bis 10 werden die Zahlen individuell benannt, danach handelt es sich um zusammengesetzte Namen, wobei die Zehner als Hilfsbasis dienen. Ausgenommen der Zahl Elf, die ebenfalls einen separaten Namen trägt, sind alle Zahlen von 12 bis 19 nach dem Prinzip *«einer»-zehn* benannt, also wörtlich übersetzt *zwei-zehn*, *drei-zehn*, *vier-zehn* und so weiter.[128] Nach 10 beziehungsweise nach 11 beginnt also ein neuer Ablauf, bei dem die Namensbezeichnung der Zahlen eine gewisse Ähnlichkeit zu ihrem Äquivalent aus dem ersten Zyklus aufweisen. So lässt sich die eigentliche Basis 20 des Vigesimalsystems in zwei separate Abläufe zu jeweils zehn Einheiten unterteilen. Gleichzeitig kann einerseits die Verbindung zum Zählprozess mit zehn Fingern und zehn Zehen und andererseits die Ähnlichkeit mit dem Dezimalsystem der Ägypter untermauert werden.

Allerdings verwendeten die Maya für Kalenderrechnungen und Datumsangaben ein etwas anderes Zahlensystem.[129] Anders als bei einem reinen Vigesimalsystem mit Stellenwert entsprechen die einzelnen Stellen bei diesem Zahlensystem nicht den Potenzen von 20, sondern den mit 18 multiplizierten Potenzen, also $18 \cdot 20$, $18 \cdot 400$, $18 \cdot 8000$.[130] Ähnlich wie beim Dezimalsystem, bei dem die Zehnerpotenzen wie beispielsweise Zehn, Hundert oder Tausend jede eine in sich geschlossene Einheit bilden, werden auch die mit 18 multiplizierten Zwanzigerpotenzen als Einheiten gesehen, die jeweils einen eigenen Namen haben. Tabelle 1 zeigt am Beispiel der Zahl 19'234, wie die Maya dieses unreine Vigesimalsystem zur Zahlendarstellung nutzten.

Tab. 1: Darstellung der Zahl 19'234 nach dem System der Maya[131]

	Vorfaktor	Wert der Einheit	Mit 18 multiplizierte Zwanzigerpotenz	*Wert der Einheit in einem reinen Vigesimalsystem*
	$2 \cdot$	7200	$18 \cdot 400$	*8000*
	$13 \cdot$	360	$18 \cdot 20$	*400*
	$7 \cdot$	20	20	*20*
	$14 \cdot$	1	1	*1*
Total: $19'234 = 14 \cdot 1 + 7 \cdot 20 + 13 \cdot 360 + 2 \cdot 7200$				

Der Grund für die Wahl der Zahl 18 als Vorfaktor der Potenzen von 20 liegt wahrscheinlich in der Astronomie: Aufgrund ihres ausserordentlichen Wissens über die Himmelskörper kannten die Maya das Sonnenjahr mit seinen ungefähr 365 Tagen.[132] Tatsächlich ist ihre Bestimmung der Jahreslänge zu 365,242 Tagen genauer als diejenige des gregorianischen Kalenders mit 365,2425 Tagen, der exakte Wert eines Sonnenjahres beträgt 365,242198 Tage.[133] Als Annäherung an die Dauer eines solchen Jahres wählten die Maya als Grundeinheit für ihre Zeitrechnung das *tun*, eine Zeitspanne mit 360 ($18 \cdot 20$) statt

[127] Ebd, S. 131.
[128] Ifrah, 1986, S. 65.
[129] Cauty, 2006, S. 17.
[130] Wussing, 2008, S. 30.
[131] Nach Wussing, 2008, S. 31.
[132] Ebd., S. 33.
[133] Ebd.

400 (20 · 20) Tagen. Ein *tun* bestand aus 18 Monaten, *uinal* genannt, und diese wiederum jeweils aus 20 Tagen, den *kin*. Wichtige Vielfache des *tun* waren das *katun* (20 *tun*) und das *baktun* (400 *tun* oder 20 *katun*). Diese Anpassung eignete sich vor allem für die Berechnung längerer Zeitspannen, denn die Dauer einer bestimmten Anzahl *tun* mit jeweils 360 Tagen lag näher an der Dauer der entsprechenden Anzahl Sonnenjahre, als wenn ein *tun* als 20 Monate beziehungsweise 400 Tage definiert wäre.

Auch die Ägypter kannten das von der Mondbewegung unabhängige Sonnenjahr mit seinen 365 Tagen.[134] Die Saatperiode, die Ernteperiode und die Zeit der jährlichen Nilüberflutung boten eine natürliche Gliederung aufgrund derer das Sonnenjahr in drei Jahreszeiten unterteilt wurde.[135] Diese waren wiederum aufgeteilt in vier Monate à 30 Tage.[136] Ein Monat war schliesslich – aus Rücksicht auf das Dezimalsystem – in drei Kalenderwochen mit jeweils zehn Tagen unterteilt.[137] Am Schluss des Jahres wurden, wie bei den Maya, fünf zusätzliche Tage angefügt, sodass die gesamte Anzahl der Kalendertage der Länge eines Sonnenjahres entsprach.[138] Diese fünf Tage galten jedoch als gefährlich, da sie die Harmonie des Kalenders störten.[139] Sowohl die Maya als auch die Ägypter verwendeten also in ihrem Kalendersystem eine Einheit, die der Grösse der Basis ihres Zahlensystems entsprach.

Allerdings hätte bezüglich der Zeitrechnung in Jahren eine Anpassung des Zahlensystems für die Ägypter mathematisch vermutlich weniger Sinn gemacht. Denn mit der Verwendung des Dezimalsystems und der Woche mit zehn Tagen als grundlegende Untereinheit des Kalenderjahres wäre dieses Vorhaben auf grösseren Widerstand gestossen. Um die Anzahl Tage in einem Jahr näherungsweise mit (ganzzahligen) Zehnerpotenzen auszudrücken, sind auch die besten zwei Möglichkeiten, 100 oder 1000, nur bedingt geeignet. Beide dieser Zehnerpotenzen verfehlen die «tatsächliche» Anzahl der Tage eines Jahres um einen Faktor von 3.6 beziehungsweise 0.36. Sowohl ein Jahr mit 100 als auch ein Jahr mit 1000 Tagen macht, bezogen auf die Dauer eines Sonnenjahres, wenig Sinn.

Bei den Maya betrug dieser Faktor bei 400, der bestmöglichen Zwanzigerpotenz, 0.9. Der Wert 360 kann demnach durch Manipulation der Faktoren in einem auf Potenzen von 20 beruhenden Zeitrechnungssystem viel eleganter erreicht werden als in einem dezimalen Zeitrechnungssystem. Daher kann davon ausgegangen werden, dass das Stattfinden einer solchen Anpassung wie sie das Zahlensystem der Maya durchlief, davon abhängt, wie schwerwiegend das Zahlensystem dabei manipuliert werden muss. Beispielsweise ist beim Dezimalsystem ein grösserer Faktor nötig als beim Vigesimalsystem. Folglich wurde diese Möglichkeit von den Ägyptern wahrscheinlich nicht in Erwägung gezogen, da ein Faktor von 3.6 die Harmonie des auf Zehnerpotenzen basierenden Zeitrechnungssystem zu stark gestört hätte.

Somit kann gezeigt werden, dass die jeweilige Zeitrechnung und Astronomie vor allem die Entwicklung des Zahlensystems der Maya beeinflusst hat, jedoch weniger die Entwicklung des Zahlensystems der Ägypter. Das Wissen um die Länge eines Sonnenjahres von ungefähr 365 Tagen und die verhältnismässig elegante Annäherung an diese Zeitdauer durch die Anpassung der höheren Zwanzigerpotenzen durch den Vorfaktor 18, bestätigt die These, dass das Zahlensystem als Teil der Mathematik der Maya durch ihre Zeitrechnung beeinflusst wurde. Auch wenn die Basis des ägyptischen Zahlensystems zwar in der Einteilung des Sonnenjahres Verwendung findet, gibt es jedoch keine Hinweise auf weitere Einflüsse der Astronomie oder der Zeitrechnung auf die ägyptische Mathematik.

3.1.1 Der Stellenwert

Ein weiterer Punkt, in dem sich die Ansätze zur Zeitrechnung und zur gesamten Mathematik unterscheiden, ist die Verwendung eines Stellenwertsystems. Die Maya griffen beispielsweise bei Datumsangaben

[134] Parker, 1974, S. 53
[135] Ebd S. 52.
[136] Ebd.
[137] Sethe, 1916, S. 30.
[138] Parker, 1974, S. 53.;
[139] Ebd.

auf das Stellenwertsystem zurück, indem sie wichtige Daten in der Form $n_1.n_2.n_3, \dots$ darstellten.[140] Diese Schreibweise steht für die Ziffern n_1, n_2, n_3, … in der Schreibweise der Maya-Zahlschrift, in dieser Reihenfolge von oben nach unten geschrieben.[141] Die Punkte zwischen den Ziffern dienen in der dezimalen Schreibweise dazu, auch Ziffern mit einem grösseren Wert als 9 im Dezimalsystem darstellen zu können, ohne das Stellenwertsystem zu stören. Die Vorteile eines Positionssystems wurden bereits im Kapitel 1.3.2 diskutiert. Die Ägypter hingegen kannten das Stellenwertsystem nicht und verwendeten stattdessen ein auf Zehnerpotenzen basierendes Additionssystem.[142] Der Grund dafür liegt möglicherweise in der Entstehungsgeschichte ihrer Schrift. Sowohl Zahlschrift als auch Buchstaben-, Silben- oder Wortschrift bilden eine unverzichtbare Grundlage für fortgeschrittene mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten einer Kultur.[143] Die ägyptischen Zahlzeichen entwickelten sich wahrscheinlich gleichzeitig mit dem übrigen hieroglyphischen Schriftsystem.[144] Diese Hieroglyphen lesen sich entweder von rechts nach links oder von links nach rechts, und dies entweder waagrecht oder senkrecht von oben nach unten.[145] Die eigentliche Leserichtung wird durch die Ausrichtung der Zeichen angegeben: Alle Lebewesen – Menschen und Tiere – wenden sich dem Beginn der Zeile zu.[146] In einem von links nach rechts zu lesenden Text blicken die Tiere nach links, in einem von rechts nach links zu lesenden Text blicken sie nach rechts. Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die verschiedenen möglichen Leserichtungen ägyptischer Hieroglyphen.

Abb. 4.1: Hieroglyphen blicken nach links in einem von links nach rechts zu lesenden Text[147]

Abb. 4.2: Hieroglyphen blicken nach rechts in einem von rechts nach links zu lesenden Text[148]

Diese Eigenschaft des Unbestimmten und Mehrdeutigen ist eine ungeeignete Voraussetzung für die Entwicklung eines Stellenwertsystems, da ein Stellenwertsystem voraussetzt, dass die Symbole in einer eindeutigen Reihenfolge geschrieben beziehungsweise gelesen werden. Denn die Position – die Stelle – eines Symbols gibt den Wert der dazugehörigen Potenz der Basis an. Die Zahl 42 darf beispielsweise nicht als 24 gelesen werden, da klar definiert ist, dass die erste Stelle (von rechts) die Anzahl der Einer und die zweite Stelle die Anzahl Zehner angibt. Eine additive Darstellung wäre in diesem Fall flexibler und sinnvoller: $(4 \cdot 10 + 2 \cdot 1)$. Egal welche Leserichtung gewählt wird, der Ausdruck wird immer korrekterweise als vier Zehner und zwei Einer gelesen. Diese Tatsache sprach also für die Durchsetzung

[140] Cauty, 2006, S. 18.
[141] Ebd.
[142] Imhausen, 2016, S. 18.
[143] Ebd., S. 15.
[144] Ebd.
[145] Ifrah, 1986, S. 222.
[146] Ebd., S. 223.
[147] Ebd.
[148] Ebd.

eines Additionssystems in der auf Hieroglyphen aufgebauten Mathematik der Ägypter und gegen ein Positionssystem.

Zwar kannte auch das Schriftsystem der Maya keine feste und absolute Leserichtung,[149] zumindest erfolgte die Notation der Zahlen aber nach einem klar geordneten und einheitlichen Muster.[150] Diese feste Struktur ermöglichte es vermutlich, dass sich das Zahlensystem der Maya, anders als dasjenige der Ägypter, zu einem Positions- oder Stellenwertsystem entwickelte. In diesem Punkt beeinflussten also kulturelle Gewohnheiten wie die Leserichtung der Schrift die Entwicklung der Zahlensysteme der beiden Kulturen, was die Untersuchungsfrage nach soziokulturellen Einflüssen auf die Entwicklung der Mathematik beantwortet.

3.1.2 Die Null

Die Entwicklung des Positionssystems zog zwangsläufig einen mathematischen Durchbruch mit sich: die Null. Die Frage, wer genau die Null ursprünglich erfunden hat, ist nicht leicht zu beantworten, da die Antwort je nach Definition anders ausfällt. Die heute weltweit im Dezimalsystem benutzte Null, die auch als eigenständige Zahl gesehen wird, stammt aus Indien.[151] Allerdings findet man auch Spuren eines rudimentäreren Konzepts der Null in Mesopotamien, im alten China sowie bei den Maya.[152] Neben der vorgegebenen Leserichtung muss bei der Verwendung eines Stellenwertsystems auch die Tatsache berücksichtigt werden, dass nicht nur das Vorhandensein beziehungsweise die Anzahl einer bestimmten Potenz, sondern auch deren Ausbleiben erfasst werden muss. Um beispielsweise die Zahl Vierhundertzwei darzustellen, reicht es nicht, eine 4 für die Hunderter und eine 2 für die Einer zu schreiben. Auch das Fehlen der Zehner muss, mithilfe einer Null, ausdrücklich erfasst werden. Sonst käme es zu Verwechslungen, denn 42 könnte als zweiundvierzig (42), vierhundertzwei (402) oder viertausendzwei (4002) gelesen werden. Die Zahl könnte ebenfalls als vierhundertzwanzig (420), viertausendzwanzig (4020) und so weiter interpretiert werden. Durch die Einführung und konsequente Nutzung der Null als eine Art Platzhalter können die geschriebenen Symbole unmissverständlich der entsprechenden Potenz zugeordnet und somit Irrtümer verhindert werden. Ein Beispiel, bei dem die Null erst nach einigen Jahrhunderten der mathematischen Vieldeutigkeit eingeführt wurde, ist das babylonische Sexagesimalsystem.[153] Als Alternative liessen die Schreiber eine leere Stelle zwischen den Ziffern stehen, um zu markieren, dass die entsprechende Potenz von 60 fehlte.[154] Eine weitere Möglichkeit war es, mithilfe schriftlicher Kommentare einen Kontext zu schaffen und so Missverständnisse zu verhindern.[155]

Tatsächlich wäre im Positionssystem der Maya die Einführung einer Null mathematisch nicht nötig gewesen.[156] Denn bei Datumsangaben wurden die «Einheiten», also die Anzahl Tage in mit 18 multiplizierten Potenzen von 20, wie *kin*, *tun* oder *baktun*, jeweils mitgeschrieben.[157] Um die Zeitdauer 1'418'000 Tage oder 3940 Jahre à 360 Tage schriftlich festzuhalten, hätte folgende Angabe gereicht: 9 *Baktun*, 17 *Katun*.[158] Dadurch dass die Einheiten ebenfalls berücksichtigt werden, ist unabhängig von der Leserichtung eindeutig, dass die Ziffer 9 mit 144'000 Tagen und die Ziffer 17 mit 7200 Tagen multipliziert werden muss. Übertragen auf das heute weltweit genutzte Dezimalsystem würde dies dem Ausdruck 1 Million, 4 Hunderttausender, 1 Zehntausender, 8 Tausender entsprechen. In diesem Aspekt entspricht das Zahlensystem der Maya strenggenommen einem Additionssystem, wie es auch die Ägypter verwendeten. Funde von Maya-Stelen – hohe, freistehende Steine, die mit Figuren und Schriftzeichen

[149] "Entzifferung der Mayahieroglyphen im digitalen Zeitalter", 2017.
[150] Siehe auch Kapitel 3.2.2.
[151] Cauty; Hoppan, 2006, S. 22.
[152] Ebd.
[153] Ebd.
[154] Ebd.
[155] Ifrah, 1986, S. 419.
[156] Ebd., S. 468.
[157] Siehe auch Kapitel 3.1.
[158] Ifrah, 1986, S. 468.

versehen waren – zeigen, dass trotzdem auch die Abwesenheit der übrigen Einheiten aufgeschrieben wurden.[159] Demnach sähe die Angabe folgendermassen aus: 9 *Baktun*, 17 *Katun*, 0 *tun*, 0 *uinal*, 0 *kin*.

Ifrah teilt die Ansicht von Geneviève Guitel (1895-1982), die als Grund für die mathematisch scheinbar überflüssige Darstellung die religiösen und ästhetischen Bedürfnisse der Bildhauer der Maya sieht.[160] Aufgrund des rituellen und zeremoniellen Charakters der Stelen seien die Schriftzeichen und Götterbilder besonders sorgfältig angefertigt worden.[161] «Sie waren grosse steinerne Schachbretter, auf denen die Ordnung der Hieroglyphen nicht weniger streng war als auf einer Rechentafel»[162], so Guitel. Um die Harmonie und göttliche Ordnung der Stele zu bewahren, stellten die Bildhauer stets alle Zeiteinheiten vom *kin* bis zum *baktun* dar, und zwar in mathematischer Reihenfolge.[163] Fehlte eine Zeiteinheit, war es aus ästhetischen Gründen und zur Vermeidung jeglicher Missverständnisse erforderlich, an der betreffenden Stelle ein Zeichen einzugravieren.[164] Dieses zeigte, zusammen mit dem Zeichen der jeweiligen Zeiteinheit, deren Fehlen an.[165]

Da die Ägypter kein Stellenwertsystem benutzten, war es für sie auch nicht unbedingt notwendig, die Null in ihre Mathematik aufzunehmen. In einem Additionssystem wird die Abwesenheit einer bestimmten Zehnerpotenz dadurch gekennzeichnet, dass diese einfach ignoriert und nicht aufgeschrieben wird. Wenn das Zeichen für 1000 viermal aufgeschrieben wird, ist eindeutig, dass es sich um die Zahl 4000 und nicht um 40 oder 400 handelt, denn zu jeder Zehnerpotenz gehört ein eigenes Zeichen. Das Additionssystem ist diesbezüglich weniger anfällig für Irrtümer als das Positionssystem.

Nach dem heutigen Verständnis erfüllt die Null auch andere Aufgaben, beispielsweise wenn eine Gleichung Null ergibt,[166] wie etwa wenn vier von vier subtrahiert wird. In der ägyptischen Mathematik wurde in einem solchen Fall anstatt der Null die Hieroglyphe für «gut» oder «perfekt» verwendet, um das Fehlen eines «schlechten» oder «imperfekten» Restbetrages zu kennzeichnen.[167] Ein anderes Zeichen, das in einem Fall dieser Art verwendet wurde, ist die Hieroglyphe für «ist nicht», um zu zeigen das «nicht etwas» übrigbleibt.[168]

Auch die ägyptische Mathematik erfüllte aber im Prinzip die genannten Voraussetzungen, die Null zu erfinden. Die Ägypter verwendeten ein Additionssystem, wie es die Maya, zumindest bezüglich Datumsangaben, taten. Und auch die Welt der Ägypter war vom Götter- und Religionsgedanken geprägt.[169] Jedoch zeigen die heute noch erhaltenen Quellen, dass ihre Mathematik vermutlich stärker durch praktische und alltägliche Bedürfnisse geprägt war als diejenige der Maya,[170] die nach Guitel mehr Wert auf eine ästhetische Zahlschrift legten und darauf, deren Harmonie nicht durch unpassende Lücken zu stören.[171] Diese unterschiedlichen Auffassungen über die Funktion, die eine Zahl beziehungsweise die Mathematik erfüllen muss, ist möglicherweise der entscheidende Faktor, weshalb die Ägypter trotzdem nicht die Null in ihre Mathematik aufnahmen.

Während die Maya vermutlich die genaue und in ihrer Auffassung wahrheitsgetreue Beschreibung des Himmlischen, also die Astronomie, aber auch die Zeitmessung als wichtigsten Anwendungsbereich ihrer

159 Ebd.
160 Ifrah, 1986, nach: Guitel, 1975, S. 408.
161 Ebd.
162 Ifrah, 1986, zit. nach: Guitel, 1975, S. 408.
163 Ifrah, 1986, S. 469.
164 Ebd.
165 Ebd.
166 Imhausen, 2016, S. 20.
167 Ebd.
168 Ebd.
169 Wussing, 2008, S. 111.
170 Ebd., S. 121.
171 Ifrah, 1986, S. 469.

Mathematik auffassten,[172] war dies bei den Ägyptern wahrscheinlich sowohl die Administration des Reichs als auch für lange Zeit ihre Funktion als Werkzeug der Machtdemonstration.[173] Durch Übertreibungen bei Mengenangaben bezüglich seines Besitzes oder seines Heeres konnte ein Herrscher sich, nicht zuletzt für die Nachwelt, einflussreicher und mächtiger darstellen, als er eigentlich war. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist der Kopf der Streitkeule von König Narmer (um 3000 v. Chr.), eines der ältesten Beispiele der ägyptischen Schrift.[174] In Abbildung 5 ist der Umfang der Beute an Mensch und Vieh zu erkennen, die Narmer während eines siegreichen Kriegszuges gemacht hat.

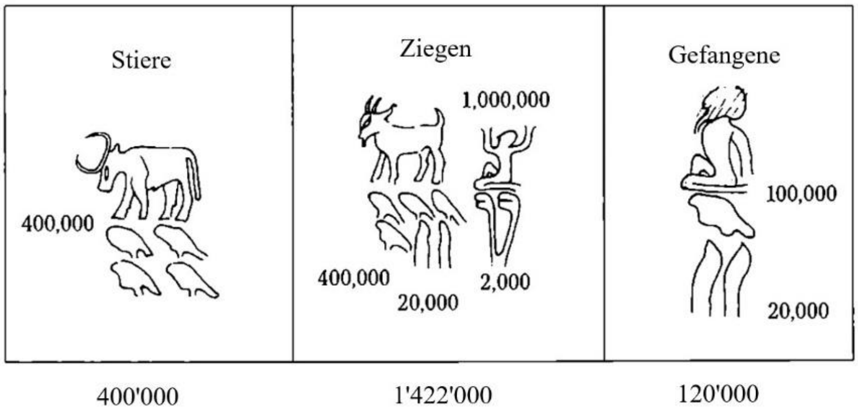


Abb. 5: Die Kriegsbeute von König Narmer[175]

Forscher:innen sind sich nicht einig darüber, ob diese Zahlen tatsächlich der Wahrheit entsprechen.[176] Fest steht jedoch, dass sie die Leser:innen beeindrucken und König Narmers Macht verbildlichen sollten.[177] Auch wenn dieses Beispiel den machtdemonstrativen Charakter der ägyptischen Mathematik zeigt, darf nicht vergessen werden, dass seit der Herrschaftszeit von König Narmer bis zu Beginn des Mittleren Reichs etwa 1000 Jahre vergingen. Während einer solchen Zeitspanne wäre es durchaus möglich, dass sich das in der praktischen Anwendung verfolgte Ziel der Mathematik grundlegend verändert hat und das Beispiel König Narmers nicht mehr als repräsentativ angesehen werden kann.

Tatsächlich verliefen die Regierungszeiten der Pharaonen während des Mittleren Reichs verhältnismässig stabiler, was vermutlich mit der Festigung ihrer innen- und aussenpolitischen Macht, aber auch einem zunehmenden Wohlstand der Mittelschicht einherging.[178] Auch im mittleren Reich waren Machtdemonstrationen sehr wichtig, sie bedurften jedoch nicht mehr den gleichen Mitteln wie im Alten Reich. Gleichzeitig wurden jedoch mathematische Texte als praktische Anleitungen für die Schreiber immer wichtiger. Dabei wurde eher darauf Wert gelegt, dass diese Anleitungen möglichst verständlich aufgebaut waren und nicht darauf, dass sie auf jeden Fall einer göttlichen Harmonie entsprachen.[179] Dieser Unterschied war vermutlich die Ursache dafür, dass die Maya, nicht jedoch die Ägypter, die Null in ihre Mathematik aufnahmen. Diese Erkenntnisse bestätigen die These, dass sich die Bewahrung der göttlichen Harmonie als religiöser Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik ausgewirkt hat, dies jedoch nur bezüglich der Mathematik der Maya.

172 Thompson, 1974, S. 83.
173 Imhausen, 2016, S. 16.
174 Ifrah, 1986, S. 230.
175 Ebd., S. 232.
176 Ebd.
177 Imhausen, 2016, S. 25.
178 Ebd., S. 59.
179 Ebd., S. 63.

3.1.3 Die Zahlenmenge

Sowohl die Maya als auch die Ägypter verwendeten ausschliesslich positive Zahlen.[180] Lange Zeit wehrte sich die Menschheit gewissermassen gegen die negativen Zahlen aufgrund ihres kontraintuitiven Charakters.[181] Der wichtigste und prägendste Aspekt der Ur-Mathematik war das Zählen und dieses ist in seiner frühen Form nicht auf den Gebrauch negativer Zahlen angewiesen, im Gegenteil: Jegliche Grössen, Mengen oder Zahlen, denen frühe Völker in ihrem Alltag begegneten – sei es die Anzahl Kühe eines Bauern oder wie viele Steine für den Bau eines Tempels nötig waren – waren zählbare, positive Zahlen.[182] Beispielsweise wendeten die Ägypter ihre Mathematik zu einem Grossteil im Bereich Abmessung und Aufteilung der Landfläche an. Diesbezüglich machte die Einführung negativer Zahlen keinen Sinn, da es unmöglich ist, Strecken oder Flächen zu messen, die kleiner als Null sind.[183] Die Idee, die Grösse einer Menge zu zählen, die nicht nur physisch nicht existiert, sondern deren Anzahl sogar «weniger als nichts» ist, wurde von Mathematikern lange Zeit nicht akzeptiert.[184] Auch Schulden konnten positiv benannt werden: Wenn ein Bauer einem anderen 5 Kühe schuldet, wurde diese Schuld als positiver Betrag aufgefasst. Der erste Bauer hätte sich nicht gedacht, dass ihm minus 5 Kühe gehören, sondern dass der zweite Bauer 5 (positiv!) Kühe von ihm bekommt.

Erste Erwähnungen negativer Zahlen findet man in chinesischen Mathematikbüchern.[185] Es ist denkbar, dass die Chinesen das Konzept der negativen Zahlen leichter akzeptieren, da sie in ihrer Philosophie, anders als die Maya oder die Ägypter, Yin und Yang kannten. Die Idee, dass sich zwei einander entgegengesetzte und dennoch aufeinander bezogene Kräfte nicht bekämpfen, sondern ergänzen,[186] floss möglicherweise in ihre Mathematik ein und prägte so das Konzept der Dualität oder Doppelheit, welche besagt, dass alles zwei Seiten besitzt.[187] Wahrscheinlich war ein solches Denken nötig, damit sich Mathematiker überhaupt mit dem Konzept der negativen Zahlen als alternative Seite der positiven Zahlen auseinandersetzten.

Bruchzahlen setzten sich geschichtlich schneller durch als negative Zahlen, da Bruchzahlen notwendig waren, um einzelne Teile von realen Objekten zu beschreiben.[188] Möglicherweise verhalf der praktische Nutzen in der Landvermessung und -aufteilung den Ägyptern, diesen mathematischen Meilenstein zu erreichen und das Konzept der Bruchzahlen zu entwickeln.[189] Es gibt jedoch keine Hinweise darauf, dass auch die Maya Bruchzahlen im Sinn der heutigen Mathematik verwendeten.[190] Ein Erklärung dafür könnte sein, dass es für sie nicht vorstellbar war, die Harmonie der rituellen und göttlichen Zyklen und Einheiten, welche eng mit ihrer Astronomie sowie Mathematik verbunden waren, durch Teilung oder Zerstückelungen zu stören. Beispielsweise hatte jeder Tag im Jahr seine eigene rituelle Bedeutung im grossen, religiösen Kontext.[191] Auch die Monate, die jeweils einer bestimmten Gottheit geweiht waren, bildeten in ihrer festgesetzten Reihenfolge einen unveränderlichen Zyklus.[192] Eine Fraktionierung des Jahres in viele kleine, unabhängige, aber unterschiedslose Einheiten wäre vielleicht gleichbedeutend mit einer Fraktionierung und Schwächung der göttlichen Ordnung gewesen. Somit bewirkte die Religion

---

180 Wussing, 2008, S. 121.
181 Hefendehl-Hebecker, 1990, S. 80.
182 "Ganze Zahlen, Historisches", 2010.
183 Ebd.
184 Ebd.
185 Hefendehl-Hebecker, 1990, S. 79.
186 "Yin und Yang", 2023.
187 Stephan, 2012.
188 Bleier et al., 2013.
189 Imhausen, 2016, S. 117.
190 O'Connor; Robertson, 2000.
191 Ifrah, 1986, S. 454.
192 Ebd., S. 455.

beziehungsweise der Anspruch des Erhalts einer göttlichen Ordnung möglicherweise, dass der Maya-Mathematik das Konzept der Bruchzahlen verwehrt blieb.

Auch wenn sich die Aufgabe 50 des Papyrus Rhind mit der Berechnung von Kreisflächen beschäftigt – die entsprechende Formel lautet $\pi \cdot r^2$, wobei r der Radius und π die irrationale Kreiszahl Pi ist – und mit einem Annäherungswert für π von 3.16 auch zeigt, dass die Ägypter von der Bedeutung der Kreiszahl wussten,[193] waren sie sich trotzdem nicht der Irrationalität, also der Eigenschaft einer Zahl, sich nicht als das Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen zu lassen, von π bewusst.[194] Die exakte Definition der irrationalen Zahlen gelang erst einigen deutschen Mathematikern im 19. Jahrhundert.[195] Daher kann davon ausgegangen werden, dass weder die Ägypter noch die Maya das Konzept der irrationalen Zahlen kannten.

3.2 Die Zahlschrift

Sowohl die Maya als auch die Ägypter verwendeten ein Schrift- und Zahlschrift-System. Nach Ifrah sei bezüglich des Konzepts der Schrift der Ägypter erwiesen, dass es nicht vom Volk der Sumerer übernommen wurde.[196] Die ältesten Funde geschriebener Dokumente dieses Volkes, mit dem die Ägypter seit Ende der Jungsteinzeit in Kontakt standen, sind zwar älter als diejenigen der Ägypter. Dass die ägyptischen hieroglyphischen Zeichen aus der Nilflora und -fauna entnommen wurden, beweise jedoch, dass die Hieroglyphen ein Produkt der ägyptischen Zivilisation sind.[197] Die Schrift, welche von den Maya verwendet wurde, findet sich hingegen auch auf Stelen und Inschriften anderer mittelamerikanischer Völker wieder.[198] Diese Funde bekräftigen die These, dass sich die mathematischen Fähigkeiten und Kenntnisse der Maya unter Einflüssen der Mathematik benachbarter Kulturen entwickelt haben. Dennoch sind einige Forscher:innen der Meinung, dass diese Schrift sich während der Verwendung durch die Maya auf einem Höhepunkt der Komplexität befunden hat.[199] Obwohl die Geschichtsforschung keine definitive Erklärung für die Wahl der Symbole in der Zahlschrift der Maya und der Ägypter bieten kann, gibt es dennoch einige plausible Vermutungen.[200]

3.2.1 Die Darstellung der Zahl 1

Wie viele andere Kulturen benutzten auch die Ägypter eines der simpelsten Symbole, um eine Einheit darzustellen: den Strich.[201] Die Wahl dieses Zeichens geht vermutlich auf das Zählen mit Kerben oder Stöcken zurück.[202] Eines der frühesten Beispiele hierfür sind gekerbte Knochen aus der Steinzeit.[203] Der Ägyptologe Kurt Sethe (1869-1934) zieht auch die Erklärung in Betracht, dass der Strich auf die vereinfachte Abbildung eines Fingers zurückgehen könnte.[204] Auch die Maya verwendeten den einfachen Strich als Symbol der Zahlendarstellung.[205] Allerdings nicht für die Abbildung einer Einheit, sondern als Zeichen für die Zahl 5.[206] Daneben nutzten sie einzig ein weiteres Zeichen in ihrem einfachen System

[193] Imhausen, 2016, S. 118.
[194] Ebd., S. 119.
[195] Bleier et al., 2013.
[196] Ifrah, 1986, S. 229.
[197] Ebd., S. 230.
[198] Ebd., S. 449.
[199] Ebd.
[200] Imhausen, 2016, S. 18.
[201] Ebd.
[202] Ebd.
[203] Ifrah, 1986, S. 110.
[204] Sethe, 1916, S. 3.
[205] Ifrah, 1986, S. 463.
[206] Ebd.

der Zahlendarstellung, nämlich den Punkt für eine Einheit.[207] Dieser könnte für ein weiteres urzeitliches Hilfsmittel des Zählens, den Kieselstein, stehen.

Nach Ifrah stellt das Anlegen von Steinhäufchen genau wie das Einkerbungsverfahren die Umsetzung des Zahlenbegriffs in einen realen Gegenstand dar, die das Gedächtnis nicht beansprucht und dem Prinzip der Zuordnung von Einheit zu Einheit zugrunde liegt.[208] Im speziellen Fall der Maya ist Ifrah jedoch der Meinung, dass sich der Punkt als Schriftzeichen für die Einheit aus der Kakaobohne herleite, die von allen Völkern Mittelamerikas als «Wechselgeld» von geringem Wert benutzt wurde.[209] Der spanische Missionar Diego de Landa (1524-1579), schrieb über die Maya, dass diese «am Boden zählten».[210] Diese Aussage unterstützt die Theorie, dass sie mit Steinen und Stöcken gezählt haben.

Sowohl die Maya als auch die Ägypter wählten also für die Darstellung der wahrscheinlich simpelsten und häufigsten Menge, der Einheit, ein Zeichen, das vermutlich nicht nur symbolisch an frühe Hilfsmittel des Zählens angelehnt ist, sondern selbst tatsächlich ein solches Hilfsmittel gewesen sein könnte. Die Zahlschrift war womöglich einfach eine weitere Stufe im Abstrahierungsprozess der Mathematik. Der erste Schritt war die paarweise Zuordnung von der Einheit der zu zählenden, physischen Menge zur Einheit einer physischen Hilfsmenge, wie beispielsweise für jedes Tier auf einer Weide einen Stein auf einen Haufen zu legen.[211] Die Zahlschrift knüpfte an diese Methode an, indem sie jedem Element der zu zählenden Menge nicht ein physisches Hilfselement zuordnete, sondern das Abbild eines solchen Hilfselements. Nun waren die Menschen nicht mehr darauf angewiesen, immer einen Haufen Steine mit sich herumzutragen, wenn sie etwas zählen mussten. Stattdessen konnten sie diese Steine in abstrahierter Form aufzeichnen beziehungsweise aufschreiben.

Die Frage, weshalb die Maya sich bei der Darstellung der Einheit für den Punkt und die Ägypter für den Strich entschieden haben, muss vermutlich unbeantwortet bleiben. Trotzdem ist die Erkenntnis wichtig, dass beide Darstellungsmöglichkeiten vermutlich auf einen gemeinsamen Ursprung, das Zählen mit natürlichen Hilfsmitteln, zurückzuführen sind. Diese Erkenntnis trägt gleichzeitig zur Beantwortung der Untersuchungsfrage nach den soziokulturellen Einflüssen bei. Dementsprechend haben neben der Religion auch weitere soziokulturelle Faktoren wie der Brauch des Zählens die Mathematik der Ägypter und Maya beeinflusst.

3.2.2 Maya-Götterköpfe als Darstellung der Zahlen

Dadurch, dass die Maya ein Positionssystem verwendeten, waren sie nebst den Zeichen für 1 und 5 nicht auf weitere Zahlzeichen angewiesen. Schliesslich variiert der Wert eines Symbols in einem Stellenwertsystem in Abhängigkeit seiner Position in der Zahlendarstellung.[212] Die verschiedenen Zeichen für die Zahlenwerte 1 bis 19 jeder Ordnung wurden additiv durch Kombinationen aus Punkten und Strichen dargestellt.[213] Als Platzhalter im vigesimalen Stellenwertsystems nahm auch die Null für die Maya eine nicht wegzudenkende Rolle ein.[214] Das in den Maya-Inschriften, den *Codices*, am häufigsten verwendete Symbol für die Null war ein Zeichen, das wahrscheinlich eine Muschel darstellen sollte,[215] dargestellt in Abbildung 6.

[207] Ebd.
[208] Ebd., S. 117; Siehe auch Kapitel 1.2.2.
[209] Ebd., S. 451.
[210] Bidwell, 1967, S. 765.
[211] Siehe Kapitel 1.2.2.
[212] Siehe auch Kapitel 1.3.2.
[213] Ifrah, 1986, S. 463.
[214] Siehe auch Kapitel 3.1.2
[215] Ifrah, 1986, S. 472.

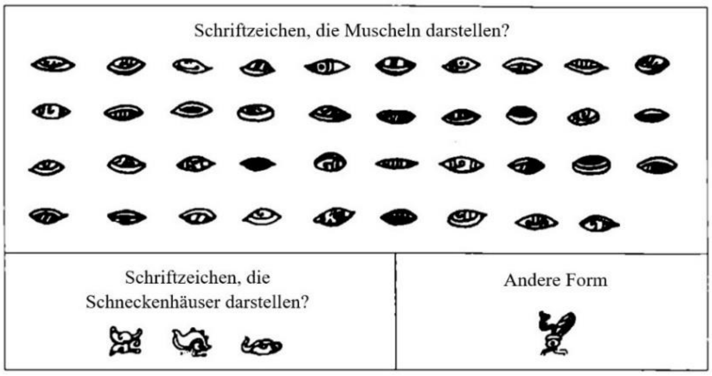
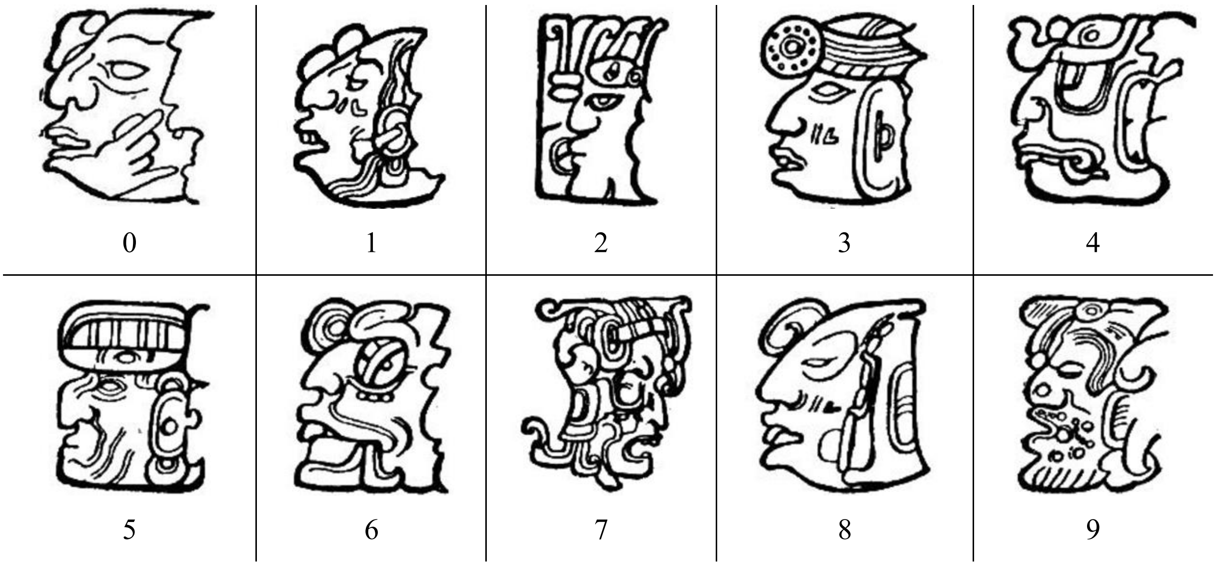


Abb. 6: Verschiedene Formen des Schriftzeichens «Null» in den Codices[216]

Weshalb die Wahl dieses Zeichens auf eine Muschelschale fiel, ist in der Geschichtsforschung nicht definitiv geklärt. Aufgrund der gewählten Symbole für Eins und Fünf kann davon ausgegangen werden, dass auch das Zeichen für die Null mit deren Bedeutung als Hilfsmittel des Zählens zusammenhängt. Möglicherweise erwiesen sich die Muscheln, die an die Strände der Yucatán-Halbinsel gespült wurden, neben Steinen und Stöcken als ebenso natürliche und für das Zählen geeignete Hilfsgegenstände. Vor allem bei Angaben über Zeitspannen, also wenn die Null das Fehlen einer zeitlichen Einheit darstellen sollte (auch kardinale Null genannt), wurde oft jenes Muschel-Symbol als Platzhalter verwendet.[217] Bei anderen Formen des Schriftzeichens für Null könnte es sich laut Ifrah um Schneckenhäuser handeln.[218]

Neben der einfachen graphischen Zahlschrift, die nur aus drei Symbolen aufgebaut war und vor allem in den Codices auftrat, verwendeten die Maya – insbesondere auf Keramiken und Skulpturen – im Zusammenhang mit Zeitangaben eine Zahlschrift in Form von Götterköpfen.[219] Jede Zahl von 1 bis 19 wurde durch den Kopf der ihr zugeordneten Gottheit dargestellt. Der Archäologe und Historiker Sir J. Eric S. Thompson (1898-1975), dem ein grosser Teil des heutigen Wissensstandes über die Maya und vor allem ihre Schrift zugeschreiben wird, hat sich in seinem Werk «Maya Hieroglyphic Writing: Introduction» unter anderem damit beschäftigt, die Zuordnungen der Zahlen zu den entsprechenden Götterköpfen zu beschreiben.[220] Diese sind in Abbildung 7 dargestellt und werden im folgenden Kapitel begründet.



[216] Ebd.
[217] Cauty; Hoppan, 2006, S. 24.
[218] Ifrah, 1986, S. 472.
[219] Wussing, 2008, S. 30.
[220] Vgl. Thompson, 1950.

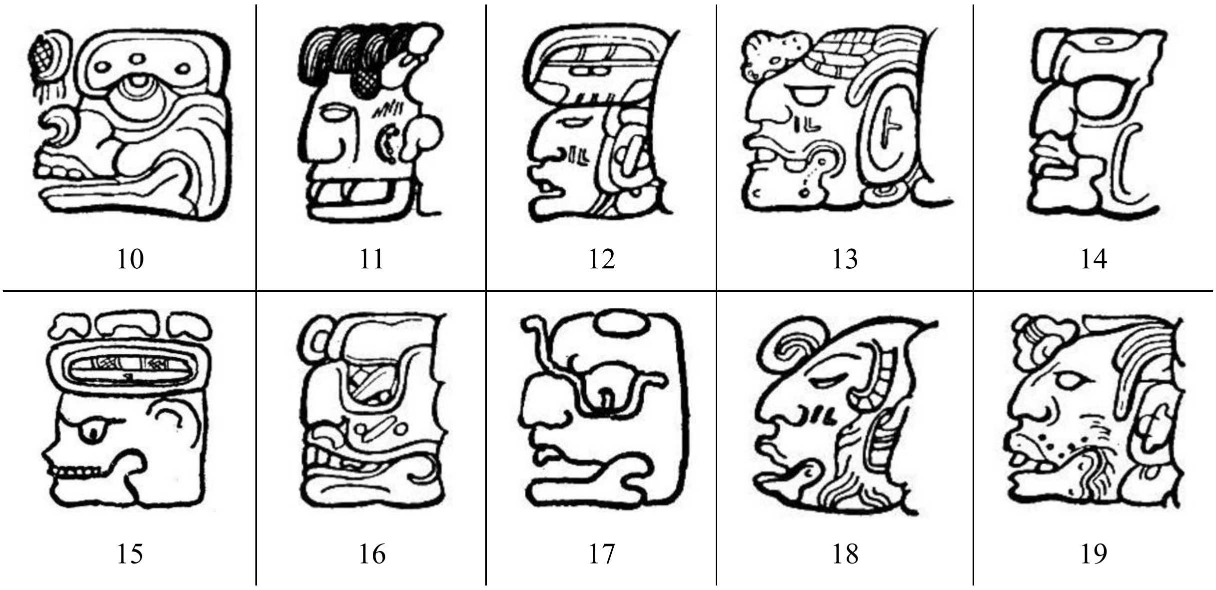


Abb. 7: Maya-Zahlschrift in Form von Götterköpfen[221]

Laut Ifrah sind die Zahlen 1 bis 13 in der Schreibweise mit Ziffern in Kopfform nach dem Bild der *Oxlahuntiku* gestaltet.[222] Dies waren die dreizehn grossen Götter der Oberen Welt, die über die dreizehn Himmel des Himmelsgewölbes regierten.[223] Die Abbildungen der Götterköpfe auf unterschiedlichen Quellen können sich leicht unterscheiden, es gibt jedoch für jede Gottheit Erkennungsmerkmale anhand derer es möglich ist, die Identität jener Gottheit festzustellen.[224] Die Schriftzeichen der Zahlen 14 bis 19 wurden aus denen der Zahlen 4 bis 9 abgeleitet.[225] Dabei wurde der ursprüngliche Unterkiefer des jeweiligen Götterkopfes durch denjenigen des Todesgottes, des Symbols der Zahl 10, ersetzt.[226] Somit wurde also eine arithmetische Grundregel, die Addition, angewandt, nämlich (10 + n).[227] Ähnlich verhält es sich mit der Benennung der Zahlen, welche für die Zahlen von 12 bis 19 ebenfalls die 10 als Hilfsbasis nutzt.[228] Somit lässt sich zeigen, dass die Benennung und bildliche Darstellung der Zahlen eng miteinander verbunden sind.

Es erweist sich als schwierig, die jeweilige Wahl des Götterkopfes als Symbol der damit verbundenen Zahl mit überzeugenden Argumenten zu begründen. Einerseits aufgrund der in der Geschichtsforschung nicht einstimmigen Vermutungen über die Identitäten der abgebildeten Götter, andererseits weil einer bestimmten Gottheit mehrere Aufgaben und Eigenschaften zugeordnet werden können und es möglich ist, dass sich Aufgabenbereiche verschiedener Gottheiten überschneiden.[229] Ein möglicher Ansatz besteht darin, im mythologischen Hintergrund einer Gottheit nach Parallelen und Verbindungen zu der ihr zugeordneten Zahl zu suchen. Ein Beispiel hierfür wäre der Todesgott, dessen Kopf die Zahl Zehn symbolisiert. Möglicherweise haben die Maya für die Repräsentation der Zahl Zehn den Todesgott gewählt, weil dieser als Verbindungsstelle zwischen dem Reich der Lebenden und der Toten interpretiert werden kann. Auch die Zahl Zehn kann in gewisser Weise als Übergangspunkt gesehen werden, da es die grösste Zahl ist, die man mit den Fingern an zwei Händen beziehungsweise mit zwei Strichen in der Zahlschrift der Maya darstellen kann. Auch wenn gewisse solcher Erklärungsversuche für einzelne Verbindungen

[221] Vgl. Macri, 1985.
[222] Ifrah, 1986, S. 462.
[223] Ebd., S. 462.
[224] Thompson, 1950, S. 131.
[225] Ebd.
[226] Ebd.
[227] Ebd.
[228] Siehe auch Kapitel 3.1.
[229] Taube, 1992, S. 1.

von Götterkopf und Zahl überzeugend wirken, gibt es dennoch kein allgemein gültiges Schema, auf das die Zuordnungen der Götterköpfe und Zahlen zurückgeführt werden könnten.

Gottheiten aufgrund überlieferter Erzählungen und Glaubensvorstellungen mit bestimmten Zahlen in Verbindung zu setzen erscheint logisch, jedoch gibt es hierfür nach dem heutigen Stand der Geschichtsforschung keine Evidenz. Ein anderer und besser belegter Ansatz bezieht sich auf den Klang des Zahlnamens. Dieser ist neben der Grösse der Zahl die zweite Eigenschaft, hinsichtlich derer jede Zahl einzigartig ist. Nach diesem Ansatz liegt der Grund für spezifische Verbindungen also nicht in der mythologischen und geschichtlichen Bedeutung der Zahlen, sondern in den phonetischen Ähnlichkeiten der Zahlnamen und der Namen der jeweiligen Gottheiten. Die Linguistin Martha Macri (*1945) wies durch das Aufzeigen verschiedener Korrelationen zwischen Zahl- und Götternamen nach, dass das Fundament des Systems der Zahlzeichen in Form von Götterköpfen auf der graphischen Darstellung von Klängen beruht und nicht in der Mythologie gesucht werden sollte.[230]

Diese Erkenntnis belegt die zu Beginn des Kapitels getroffene Vermutung, dass zwischen der Benennung und der bildlichen Darstellung der Zahlen eine enge Verbindung besteht. Auch wenn die konkreten Zuordnungen der Götterköpfe und Zahlen vermutlich nicht mythologisch begründet werden können, zeigt die Zahldarstellung mithilfe von Götterköpfen dennoch, welchen grossen Einfluss die Religion auf das Denken der Maya nahm. Dies bestätigt die These, dass die Mathematik der Maya von deren religiösem Denken geprägt war.

3.2.3 Die Darstellung ägyptischer Brüche und Zahlsymbole

Das dezimale Additionssystem der Ägypter erforderte ein eigenes Zahlzeichen für jede Zehnerpotenz.[231] Diese sind in Abbildung 8 dargestellt. Anders als bei der Darstellung in Form von Götterköpfen, die die Maya verwendeten, lässt sich die Wahl der Symbole der ägyptischen Zahlschrift anhand der Grösse der jeweiligen Zehnerpotenz begründen,[232] auch wenn es sich auch hier meist nur um Spekulationen handelt. Der Zusammenhang der Hieroglyphe mit der Grösse der Zahl könnte darauf zurückgehen, dass für die Ägypter die Zahlen in einem engeren Verhältnis zu den konkreten praktischen Anwendungsmöglichkeiten standen.[233] Daher ist die Wahl alltäglicher und grossenteils natürlicher Symbole, aber vor allem Symbole mit einer messbaren Eigenschaft für die Darstellung naheliegend. Da die Maya die Zahlen eher als Mittel zur Beschreibung göttlicher Abläufe und Kalender sahen,[234] suchten sie womöglich die Symbole auch in einem religiösen und spirituellen Umfeld, das nicht viel mit der Mathematik an sich gemeinsam hat.[235]

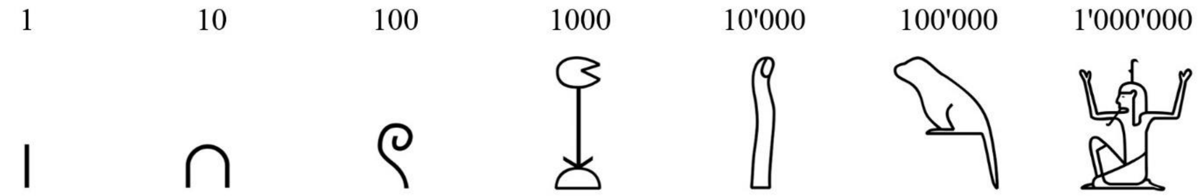


Abb. 8: Ägyptische Zahlzeichen in Hieroglyphen-Schrift[236]

[230] Macri, 1985, S. 79.
[231] Ifrah, 1986, S. 231.
[232] Imhausen, 2016, S. 18.
[233] Ebd., S. 27.
[234] Ifrah, 1986, S. 451.
[235] Siehe auch Kapitel 3.2.3.
[236] Vgl. "Ägyptische Zahlschrift", 2022.

Neben dem Strich für die Darstellung der Zahl 1 verwendeten die Ägypter für die Zahl 10 ein Bildzeichen, das einem auf den Kopf gestellten grossen U gleicht.[237] Eine mögliche Interpretation dieses Zeichens ist, dass es sich dabei um eine Leine oder Viehfessel handelt – möglicherweise weil 10 Tiere an eine solche Leine gebunden wurden.[238] 100 wurde durch eine eingerollte Spirale oder ein Seil dargestellt,[239] das ein Werkzeug zum Abmessen von Längen sein könnte.[240] Den Zusammenhang mit der Zahl 100 sieht die Ägyptologin Annette Imhausen (*1970) darin, dass die Länge eines Feldes, für deren Messung solche Mess-Seile benutzt wurden, vielleicht einer Standardlänge von 100 Untereinheiten[241] entsprach.[242]

Für die Darstellung der Zahl 1000 verwendeten die Ägypter das Bild einer Lotusblüte samt Stiel, eine in der ägyptischen Kultur aufgrund ihrer rituellen und religiösen Bedeutung sowie ihres häufigen Auftretens in Kunst und Landschaft sehr wichtigen Pflanze.[243] Dieses auch heute noch häufige Vorkommen könnte der Grund sein, dass die Lotusblüte als Symbol der Zahl 1000 gewählt wurde.[244] Die Hieroglyphe eines Fingers wurde als Zeichen für die Zahl 10'000 verwendet. Imhausen vermutet, dass sich die Zahl 10'000 im Verständnis der Ägypter aus einem «Bündel» von 10 einzelnen Tausendern zusammensetzte.[245] Aufgrund der Menge Finger an zwei Händen wurde die Hieroglyphe des Fingers mit ihrem natürlichen Attribut, die Zahl 10 zu verbildlichen, möglicherweise als Symbol für dieses Bündel von Tausendern gewählt.[246]

Ähnlich der Darstellung der Zahl 1000 ist auch das Symbol für die 100'000 ein Gegenstand, der oft in grossen Mengen vorkommt, und so laut Imhausen die Grösse der Zahl 100'000 unterstreichen soll: Die Kaulquappe.[247] Das Zahlzeichen der grössten Zehnerpotenz, der Million, ist der Gott *Heh*, der altägyptische Gott der Unendlichkeit.[248] Der Grund dafür, weshalb die Wahl auf *Heh* fiel, könnte sein, dass die alten Ägypter aufgrund der Mächtigkeit und unvorstellbaren Grösse einer Million diese Zahl mit dem Konzept der Unendlichkeit assoziiert haben. In Anbetracht des präsenten Göttergedankens liegt die Vermutung nahe, dass die alten Ägypter sich bei der Suche nach einem passenden Symbol daher bewusst für den Gott der Unendlichkeit entschieden haben. Imhausen begründet diese Verbindung damit, dass die Ägypter *Heh* oft als Motiv auf Tempelmauern, Vasen und Schmuck abbildeten und sich von ihm Jahrmillionen an Lebenszeit erhofften.[249] Somit kann gezeigt werden, dass die Vorstellungen und Bildnisse von Gottheiten sowohl die Zahlendarstellung der Ägypter als auch diejenige der Maya beeinflusst haben. Die Ergebnisse zeigen jedoch auch, dass geografische und biologische Gegebenheiten bei der Entstehung der Zahlschrift der Ägypter eine grosse Rolle gespielt haben.

Der Ägyptologe Kurt Sethe (1869-1934) sieht jedoch die Bedeutung der Zahlzeichen für die jeweiligen Zehnerpotenzen in erster Linie in der Phonetik.[250] Dem hieroglyphischen System folgend, hätten die Ägypter die betreffenden Zahlen mit den Bildern solcher Worte beschrieben, welche die gleichen Konsonanten enthielten.[251] Dennoch berücksichtigt Sethe auch Zusammenhänge ähnlich den oben

[237] Ifrah, 1986, S. 231.
[238] Imhausen, 2016, S. 18.
[239] Ifrah, 1986, S. 231.
[240] Imhausen, 2016, S. 18.
[241] Siehe auch Kapitel 3.3.1.
[242] Imhausen, 2016, S. 18.
[243] Ebd., S. 19.
[244] Ebd.
[245] Ebd.
[246] Ebd.
[247] Ebd.
[248] "Ägyptische Zahlschrift", 2022.
[249] Imhausen, 2016, S. 19.
[250] Sethe, 1916, S. 3.
[251] Ebd.

erläuterten.[252] Sowohl die Maya als auch die Ägypter wählten ihre Zahlsymbole also anhand phonetischer Gemeinsamkeiten von Zahl und abgebildetem Gegenstand. Bei den Ägyptern lässt sich dieses Phänomen mit dem System der Hieroglyphen erklären: Auch abstrakte Worte wurden in Silben unterteilt und jede Silbe anschliessend durch ein Objekt dargestellt, dessen Name gegenüber der Silbe über eine gewisse phonetische Ähnlichkeit verfügte.[253] Eine mögliche Erklärung ist also, dass die Ägypter bezüglich der schriftlichen Darstellung der Zahlen natürlicherweise diesem Prinzip folgten. Auch die Maya benutzten eine Schrift, in der sich einzelne Schriftzeichen aus verschiedenen Silbenzeichen zusammensetzten.[254] Somit ist diese Erklärung auch bezüglich der Maya plausibel, was der Sprache eine Bedeutung als soziokulturellen Einflussfaktor zukommen lässt.

Brüche wurden in der ägyptischen Mathematik mithilfe einer Hieroglyphe ausgedrückt, die einen Mund darstellt. Ifrah transkribiert diese Hieroglyphe mit *eR* und übersetzt sie im Kontext mathematischer Brüche sinngemäss mit «Teil».[255] Die Hieroglyphe stand dabei über dem Nenner. Für bestimmte Brüche wie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ gab es eigene Zeichen. Für $\frac{1}{2}$ stand die transkribierte Hieroglyphe *GeS* die mit «Hälfte» übersetzt werden kann. $\frac{2}{3}$ wurde mithilfe einer Hieroglyphe ausgedrückt, die wörtlich übersetzt «die beiden Teile» lautet. Die Darstellung ägyptischer Bruchzahlen in Form von Stammbrüchen unterschied sich fundamental von heutigen Darstellungskonzepten. Dieser Unterschied liess moderne Mathematiker wie Sethe oft sogar die mathematischen Fähigkeiten der Ägypter anzweifeln, wie folgendes Zitat zeigt:

> *Wir begreifen nicht, dass Menschen, wenn sie 5 durch 7 teilten und dabei $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ erhielten, wie es die Ägypter taten, nicht zur Summierung dieser 5 gleichartigen Additionsposten geschritten sind und so den viel einfacheren Ausdruck $\frac{5}{7}$ gefunden haben […]. Wir verstehen es nicht, wie jemand wohl wissen kann, dass das, was er durch $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{15}$ ausdrückt, 11 Teile bilde[t], die durch 4 Teile zu einem Ganzen ergänzt werden, und doch nicht $\frac{11}{15}$ dafür sagt.*[256]

Der wohl grösste Vorteil der Bruchdarstellung als Stammbrüche liegt darin, dass es einfacher ist, die Werte zweier Brüche zu vergleichen. Beispielsweise ist es schwieriger, $\frac{3}{10}$ und $\frac{2}{7}$ zu vergleichen, als die gleichen Brüche als Stammbrüche dargestellt $\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Da es jedoch auch Brüche gibt, die durch verschiedene Kombinationen von Stammbrüchen dargestellt werden können – $\frac{3}{10}$ beispielsweise auch als $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ – liegt dieser Vorteil nicht in allen Fällen vor.

Auch wenn die ägyptischen Methoden bezüglich Bruchrechnung von einigen Historiker:innen kritisiert werden, zeigt die Tatsache, dass die Ägypter Brüche überhaupt kannten, dass ihre Mathematik verglichen mit anderen Kulturen sehr fortschrittlich war.[257] Imhausen sieht die ägyptische Bruchrechnung sogar als «Evolution eines mathematischen Systems in ein neues Gebiet».[258]

3.2.4 Die Anordnung der Ziffern

Sowohl die Ägypter als auch die Maya gruppierten Zahlzeichen desselben Wertes in der Darstellung der Zahlen. Diese Gruppierungen dienten nicht nur einem ästhetischen Zweck, sondern ermöglichten praktischerweise auch, die Anzahl der Ziffern des gleichen Werts auf einen Blick zu erfassen.[259] Nicht nur die Maya und Ägypter, sondern auch die meisten anderen Völker fassten maximal vier Elemente zu einer solchen Gruppe zusammen.[260] Ifrah sieht den Grund dafür, dass «niemand mit einem einzigen Blick mehr als vier aneinandergereihte Striche lesen konnte».[261] Falls diese Begründung stimmt, würde

[252] Ebd.
[253] Ifrah, 1986, S. 228.
[254] Ebd., S. 449.
[255] Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Ifrah, 1986, S. 235f.
[256] Sethe, 1916, S. 60.
[257] Imhausen, 2016, S. 52.
[258] Ebd.
[259] Sethe, 1916, S. 5.
[260] Ifrah, 1986, S. 172.
[261] Ebd.

sie die These unterstützen, dass sowohl die Mathematik der Maya als auch diejenige der Ägypter durch biologische Faktoren, nämlich der Funktion des menschlichen Gehirns, beeinflusst wurde.

Wie gross die Menge der maximal aufnehmbaren Informationen auf einen Blick tatsächlich ist, ist in der Forschung jedoch umstritten. Beispielsweise prägte George A. Miller (1920-2012) den Begriff der *Millerschen Zahl*, der maximalen Anzahl Informationseinheiten, die sich ein Mensch gleichzeitig im Kurzzeitgedächtnis präsent halten kann, und legte deren Wert auf 7 fest.[262] Andere Studien ergaben jedoch, dass der Mensch im Durchschnitt nur 3-4 Informationseinheiten gleichzeitig im Arbeitsgedächtnis behalten kann.[263] Ein anderer Grund für die Gruppierungen in je vier Einheiten könnte sein, dass die Hand mit ihren fünf Fingern als «Über-Einheit» mit dem Wert 5 als Vorbild für die Zahldarstellung genommen wurde. Eine Gruppe mit fünf Elementen wäre dementsprechend als ein Element höheren Ranges zusammengefasst worden.

Die Maya gaben die ersten vier Zahlen durch die entsprechende Anzahl von Punkten wieder, von denen jeder einer Einheit entsprach.[264] Die Zahl 5 wurde durch einen waagrechten oder senkrechten Strich dargestellt, die Zahlen von 6 bis 9 durch einen, zwei, drei oder vier Punkte, die über beziehungsweise links neben dem Strich standen. Abbildung 9 zeigt die Darstellungen der Zahlen von 1 bis 9. Die Zahlen 10 und 15 wurden durch zwei beziehungsweise drei Striche dargestellt.[265] Die oben genannte Bedeutung der Gesamtheit der Zahl 5 ist in diesem Vorgehen deutlich zu erkennen. Die verschiedenen Potenzen von 20 waren der Grösse nach vertikal angeordnet, wobei die höchste Zwanzigerpotenz zuoberst stand,[266] vielleicht weil die Mayas das Konzept der Grösse vermutlich mit dem Konzept der Höhe, und nicht der Tiefe oder einer anderen Dimension, assoziierten. Bei visuellen Vergleichen im Alltag vergleicht der Mensch die Höhe zweier Gegenstände, um Rückschlüsse auf deren Grösse zu ziehen.

Abb. 9: Anordnung der Ziffern in der Zahlschrift der Maya[267]

In der ägyptischen Zahlschrift werden die Ziffern zu Vierer-, Dreier- oder Zweiergruppen zusammengefasst.[268] Auf die vier nebeneinander geschriebenen Ziffern, die die Zahl 4 darstellen, folgt die Zahl 5, deren Ziffern nun in eine Dreier- und eine Zweiergruppe aufgeteilt sind.[269] Da bei der Darstellung der Zahl 8 beide dieser Gruppen «voll» sind, also aus vier Ziffern bestehen, wird die Zahl 9 durch drei Dreiergruppen dargestellt. Abbildung 10 zeigt die Darstellung der Zahlen von 1 bis 9. Nach diesem Konzept werden nicht nur die Einer, sondern auch alle anderen Zehnerpotenzen gruppiert.[270]

Die einzige Ausnahme bezüglich der Gruppierung bildet das Zeichen für 1000, die Lotuspflanze.[271] In den ältesten hieroglyphischen Inschriften wurde dieses Zeichen in Fällen, in denen mehrere Exemplare aufgeschrieben werden mussten, wie beispielsweise um die Zahl 3000 darzustellen, zu einem neuen Zeichen, dem Lotus-Busch, zusammengefasst.[272] Dabei wurden die Stiele der Lotusblüten miteinander verbunden. Vielleicht war der Lotusbusch die einzige bildliche Zusammenfassung der Zahl-Hieroglyphen, weil für die übrigen Zahlzeichen keine solche Zusammenfassung existierte, die immer noch den

[262] “Millersche Zahl”, 2022.
[263] Jones, 2008.
[264] Ifrah, 1986, S. 463.
[265] Ebd.
[266] Bidwell, 1967, S. 764.
[267] Vgl. “Maya-Zahlschrift”, 2023.
[268] Sethe, 1916, S. 5.
[269] Ebd.
[270] Ebd.
[271] Ebd., S. 6.
[272] Ebd.

Forderungen nach bildlicher Einfachheit entsprach. Beispielsweise wäre eine Hand, die nur zwei oder drei Finger streckt, einerseits eine im Kontext der Zahlschrift zu komplizierte Hieroglyphe, und andererseits könnten diese Finger auch beispielsweise als Richtungszeigen missinterpretiert werden. Mit der Zeit verschwand jedoch auch die Darstellung des Lotusbusches aus der Hieroglyphenschreibweise und die einzelnen Lotusblüten wurden getrennt geschrieben.[273]

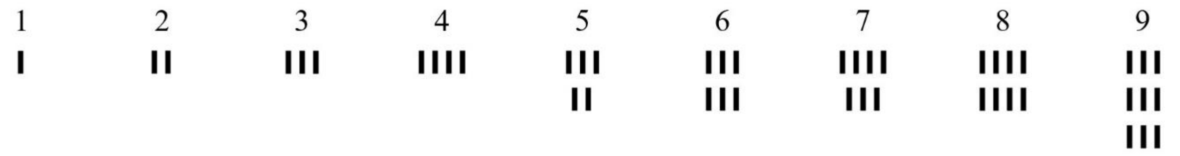


Abb. 10: Anordnung der Ziffern in der Hieroglyphen-Schrift der Ägypter[274]

Innerhalb der zusammengesetzten Zahlendarstellung waren die Ziffern in kleiner werdender Reihenfolge von links nach rechts geordnet.[275] Dabei wurden die Ziffern vermutlich auch in diese Richtung gelesen, da die absteigende Reihenfolge der sprachlichen Benennung der Zahlen entsprach. Bei der Zahlbenennung wurden nämlich die höheren Zehnerpotenzen zuerst genannt.[276]

3.3 Die Geometrie

Es gibt keine Informationen, die die Existenz geometrischer Konzepte im mathematischen Wissen oder die Anwendung geometrischer Fähigkeiten im Alltag der Maya bestätigen könnten.[277] Dies liegt einerseits am Mangel an von den Maya verfassten Texten, andererseits daran, dass auch die dokumentarischen Texte der spanischen Eroberer in diesem Bereich kaum spezifische Informationen bieten.[278] Dennoch argumentieren Historiker:innen wie Ivor Grattan-Guinness (1941-2014), dass sich das Verständnis der Geometrie in Gemälden, Skulpturen und Lageplänen, also in der Architektur und in den Bautraditionen der Maya zeigt.[279] Beispielsweise zeigten Analysen der Lagepläne von Tikal, einer der grössten Städte der Maya in Guatemala, dass gewisse Tempel so angeordnet sind, dass sie die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.[280] Auch wenn solche Beispiele für die Fähigkeiten der Maya sprechen, muss Wert darauf gelegt werden, dass zwar Informationen bezüglich geometrischer Fähigkeiten aus den Artefakten und Denkmälern gewonnen, diesen aber nicht in einem Akt von übereifriger Interpretation aufgedrängt werden dürfen.[281] Trotzdem lassen diese Artefakte und Denkmäler einen Einfluss der Architektur auf die Entwicklung der Maya-Mathematik vermuten.

Eindeutigere Informationen über das geometrische Wissen ihrer Kultur bieten ägyptische Papyri. Die frühesten dieser mathematischen Texte stammen aus dem mittleren Reich.[282] Das bedeutet nicht, dass die Ägypter vor dem mittleren Reich keine mathematischen Fähigkeiten besassen, sondern dass diese auf andere Weise kommuniziert wurden.[283] Die Vereinheitlichung des Reiches aufgrund der Wiederherstellung der Macht des Königs im mittleren Reich brachte einen neuen Organisation- und Administrationsapparat mit sich.[284] Imhausen vermutet, dass das auch die Organisation der Bildung der Schreiber beinhaltete und diese dadurch ab diesem Zeitpunkt eine einheitliche und festgesetzte mathematische

[273] Ebd.
[274] Vgl. Ifrah, 1986, S. 170.
[275] Sethe, 1916, S. 7.
[276] Ebd.
[277] Closs, 1994, S. 147.
[278] Vinette, 1986, S. 390.
[279] Closs, 1994, S. 147.
[280] Ebd.
[281] Vinette, 1986, S. 406.
[282] Imhausen, 2016, S. 63.
[283] Ebd.
[284] Ebd.

Ausbildung absolvierten.[285] Die Erscheinung der Papyri als Sammlung beschriebener Probleme und deren Lösungen zu Bildungszwecken passt gut in das Gesamtbild des Mittleren Reichs, auch wenn es keine Metatexte gibt, die diese Theorie bestätigen oder andere Gründe für die Entstehung der Papyri benennen.[286] Da die Maya nicht von einem einzelnen, mächtigen König regiert wurden und als Volk unter diesem vereint war, würde diese Theorie auch erklären, weshalb die Maya keinen Nutzen in schriftlicher Festhaltung eines mehr oder weniger einheitlichen Bildungskonzeptes sahen. Diese Erkenntnisse tragen zur Beantwortung der Frage bei, inwiefern politische Faktoren die Mathematik der beiden Kulturen beeinflusst haben. Gleichzeitig sprechen sie jedoch gegen die These, dass die Mathematik der Maya durch ihre staatliche Bürokratie beeinflusst wurde.

Die Papyri zeigen, dass die Ägypter Flächeninhalte von Rechteck, Dreieck und Trapez sowie eines Kreises – mit einer Annäherung von circa 3.16 für π – berechnen konnten.[287] Weiterhin finden sich Aufgaben, bei denen Volumina von Getreidespeichern berechnet werden.[288] Solche Ergebnisse zeigen, dass die These der Einflussnahme der Architektur auf die Mathematik der Ägypter stimmt. Die Formel für die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfs (Aufgabe 14 im Moskauer Papyrus), also einer Pyramide, bei der die Spitze «abgeschnitten» ist, wird unter Historiker:innen und Mathematiker:innen als Glanzleistung der ägyptischen Geometrie gesehen.[289] Es gibt mehrere Ansätze, die erklären, wie diese Formel erlangt werden konnte. Möglicherweise trugen praktische Erfahrung aus Arbeiten mit Holz und anderen Materialien dazu bei.[290] Andere Erklärungen gehen davon aus, dass die Berechnung eines Pyramidenstumpfs als Variation einfacherer Berechnungen gesehen und davon hergeleitet wurde.[291]

Eine weitere berühmte Aufgabe ist Nummer 10 des Moskauer Papyrus, die von der Berechnung der Oberfläche eines «Korbs» handelt.[292] Bezüglich der genauen Form des «Korbs» sind sich Mathematiker:innen jedoch nicht einig.[293] Es könnte sich um die Oberfläche einer Halbkugel, eines Halbzylinders oder eines anderen korbähnlichen Vorratsbehälters handeln.[294] Verschiedene graphische Interpretationen eines «Korbs» sind in Abbildung 11 dargestellt.

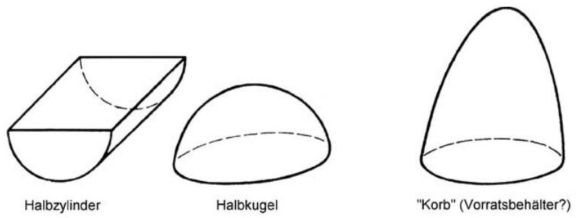


Abb. 11: Verschiedene graphische Interpretationen eines «Korbs», wie er in Aufgabe 10 des Moskauer Papyrus beschrieben ist[295]

Wie alle anderen Kulturen nutzten die Maya und Ägypter Masssysteme, um Handel zu betreiben, Dinge zu konstruieren oder zu vergleichen.[296] Auch wenn sich die Masseinheiten verschiedener Kulturen beispielsweise in ihrer Länge unterscheiden, erfüllen sie dennoch immer diesen gleichen Zweck.[297]

[285] Ebd.
[286] Ebd.
[287] Wussing, 2008, S. 119.
[288] Ebd., S. 121.
[289] Ebd., S. 119.
[290] Imhausen, 2016, S. 76.
[291] Ebd.
[292] Wussing, 2008, S. 121.
[293] Ebd.
[294] Ebd.
[295] Ebd., S. 120.
[296] Cobos, 2010, S. 49.
[297] Ebd.

3.3.1 Längeneinheiten

Sowohl die Ägypter als auch die Maya leiteten die Längeneinheiten wahrscheinlich von der Anatomie ihrer Körper ab.[298] Der Grund dafür liegt vermutlich in der Zugänglichkeit und intuitiven Anwendbarkeit der Körperteile als Messinstrumente. Dieser Aspekt trägt zur Beantwortung der Untersuchungsfrage nach geografisch-biologischen Einflüssen bei. In der ägyptischen Geschichtsforschung gibt es weit mehr Evidenz, die die Anwendung der Längeneinheiten bestätigen.[299]

Die grundlegende Masseinheit der Ägypter war die Elle, also die Länge eines Unterarms vom Ellbogen bis zu den Fingerspitzen.[300] Auch wenn vermutlich keine exakte und standardisierte Länge der Elle existierte – biologisch bedingt haben nicht alle Menschen gleich lange Unterarme – wird angenommen, dass die ägyptische Elle ungefähr einer Länge von 52.5 cm entsprach.[301] Es ist auch möglich und sogar wahrscheinlich, dass die Länge einer ägyptischen Elle im Verlauf der Zeit variierte.[302] Die Elle war unterteilt in 7 «Hände» oder «Handflächen», die wiederum jeweils 4 «Finger» entsprach.[303] Die Verwendung dieser Masseinheiten zeigt deutlich, wie die menschliche Anatomie die Entwicklung der Masseneinheiten und der Mathematik der Ägypter geprägt hat.

Anhand der Analyse einiger architektonischer Bauten der Maya gelang es Forscher:innen, ein mögliches Einheitensystem zu rekonstruieren, das auf der Anatomie des menschlichen Körpers aufgebaut ist und das die Maya womöglich in ihrem Alltag benutzt haben könnten.[304] Dieses nachgebildete Einheitensystem besteht aus einer Grundeinheit, die ungefähr einem Centimeter entspricht. 9 dieser Grundeinheiten ergeben eine «Hand» oder «Handfläche», 16 der Grundeinheiten ergeben einen «Fuss». 16 «Handflächen» beziehungsweise 9 «Füsse» ergeben eine «Armspanne», die etwa einer Länge von 147 cm entspricht.[305] Falls ein solches Einheitensystem tatsächlich verwendet wurde, würden weder das Masssystem der Maya noch dasjenige der Ägypter auf das jeweilig verwendete Zahlensystem zurückgehen. Im Gegenteil: Die Unterteilungen mit Faktoren wie 7 oder 9 wirken – verglichen mit dem Dezimal- oder Vigesimalsystem – willkürlich. Daher kann davon ausgegangen werden, dass sich die Längenmessung in beiden Kulturen nicht zum gleichen Zeitpunkt wie das Zahlensystem entwickelt hat. Vermutlich liegt der Ursprung der Längenmessung zeitlich weiter zurück als die Etablierung eines Zahlsystems. Hätten sich Zahl- und Masssystem gleichzeitig entwickelt, oder das Masssystem sogar noch später, wie es bei der Einführung der Metrischen Masssystems der Fall war,[306] würden vermutlich mehr Parallelen zwischen Zahl- und Masssystem gefunden werden.

3.3.2 Flächeneinheiten

Die Fähigkeiten der Flächenberechnung der Maya zeigt sich vor allem in ihrer Kunst.[307] Die äusserst präzisen und symmetrischen Anordnungen von religiösen Formen und Figuren auf Stelen, wie in Abbildung 12 dargestellt, und Gräbern deuten darauf hin, dass Maya sehr geschickt im Umgang mit Einteilungen von Flächen waren.[308] Ob die Maya jedoch bezüglich Flächenberechnungen standardisierte Einheiten kannten und ob sich diese unabhängig von den Längeneinheiten entwickelt haben, kann nach heutigem Stand der Wissenschaft nicht beantwortet werden.[309]

[298] Ebd., S. 50.; Imhausen, 2016, S. 41.
[299] O'Brien; Christiansen, 1986, S. 149.
[300] Imhausen, 2016, S. 41.
[301] Ebd.
[302] Ebd.
[303] Ebd.
[304] O'Brien; Christiansen, 1986, S. 149.
[305] Ebd.
[306] "Metrisches Einheitensystem", 2023.
[307] Cobos, 2010, S. 52.
[308] Ebd.
[309] Vinette, 1986, S. 387.

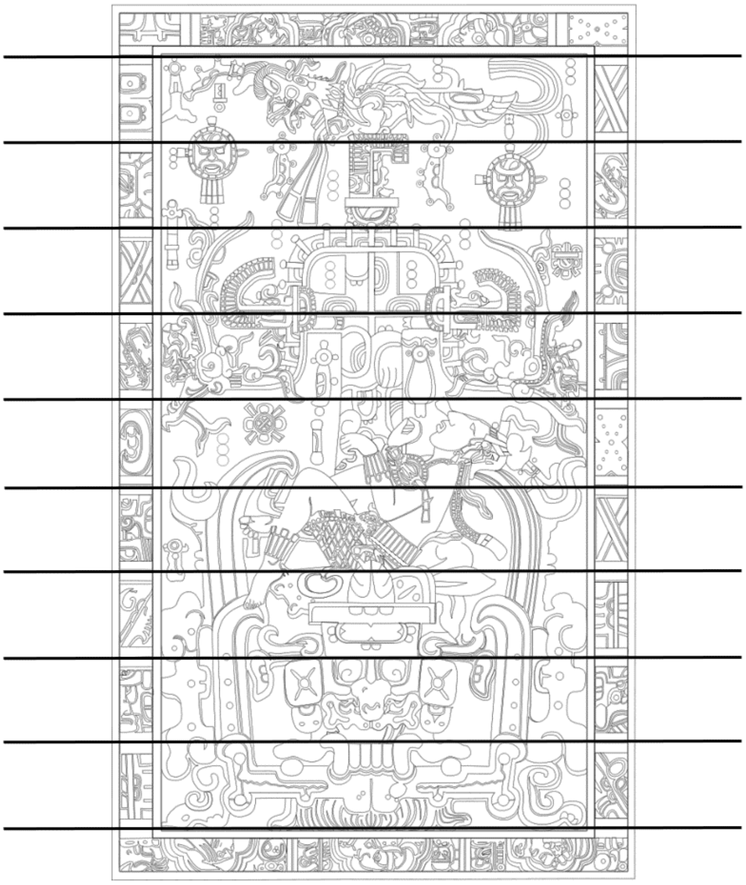


Abb. 12: Symmetrische Anordnung von religiösen Formen und Figuren auf dem Grabdeckel von Pakal; Die horizontalen Linien unterteilen das Bild in verschiedene Abschnitte, mit jeweils eigenen Zeichen und Bedeutungen[310]

Im Vergleich dazu wurden die ägyptischen Flächeneinheiten oft im Zusammenhang mit Landvermessung verwendet. Wie bei den Längenmassen bildete auch hier die Elle die grundlegende Einheit.[311] Die kleinste Flächeneinheit, die «Quadratelle», wurde von den Ägyptern ebenfalls nur Elle genannt,[312] da sie keine Bezeichnung für das Quadrat einer Einheit hatten.[313] Die Tatsache, dass die kleinste Flächeneinheit, die die Ägypter kannten, 0.5 m · 0.5 m betrug zeigt, dass sich die Ägypter vermutlich mit Flächenberechnung in einer völlig anderen Grössenordnung als die Maya auseinandersetzten. Die Elle als Flächeneinheit würde sich nicht eignen, derartig präzise Symmetrien auf einer Stele zu konstruieren.

Die nächstgrössere Einheit bestand aus einem Quadrat von zehn mal zehn Ellen, welches Imhausen mit *land unit* (Flächeneinheit) übersetzt.[314] Untereinheiten dieser *land unit* waren die *shoulder* (Schulter), ½ einer *land unit*, und die *account unit* (Rechnungseinheit), ¼ einer *land unit*. Die nächstgrössere Flächeneinheit war ein Streifen von 10 · 100 Ellen, deren Namen Imhausen mit *thousand* übersetzt, da die entsprechende Hieroglyphe das Bild der Lotusblüte war,[315] die auch genutzt wurde, um die Zahl 1000 darzustellen.[316] Der Name der letzten und grössten Einheit, ein Quadrat von 100 · 100 Ellen, wird mit *aurora*, zu Deutsch Morgenröte, übersetzt. Der Grund der Wahl der entsprechenden Hieroglyphe für diese Einheit liegt vermutlich in der Phonetik.[317] Imhausen vermutet, dass die durch Schriften des alten Reichs

[310] Vgl. Cobos, 2010, S. 52.
[311] Imhausen, 2016, S. 46.
[312] Ebd.
[313] Hermann, 2019, S. 101.
[314] Ebd.
[315] Ebd.
[316] Siehe auch Kapitel 3.2.2.
[317] Siehe auch Kapitel 3.2.2.

bestätigte Landvermessung den Weg für die späteren Flächenberechnungen abstrakter Rechtecke und anderer geometrischer Formen geebnet hat.[318] Diese Erkenntnisse zeigen, dass das System der Masseinheiten der Ägypter stark von ihren praktischen Bedürfnissen der Landvermessung geprägt war.

3.3.3 Volumeneinheiten

Der Forschung stehen auch deutlich mehr Anhaltspunkte bezüglich des von den Ägyptern verwendeten Systems der Volumeneinheiten zur Verfügung. Die Ägypter verwendeten bei Volumenangaben unterschiedliche Einheiten, je nachdem um welches Material es sich handelte.[319] Ein hekat, die Standardeinheit für Getreide, entsprach ungefähr 4.8 Liter und wurde, um geringere Mengen anzugeben, in kleinere Untereinheiten gegliedert.[320] Diese Gliederung ist vergleichbar mit derjenigen der *land unit* in kleinere Flächeneinheiten.[321] Andere Materialen wurden jedoch nicht mit diesen Masseinheiten angegeben. Der Papyrus Reisner I aus dem mittleren Reich beschreibt beispielsweise die Volumina von Blöcken eines unbestimmten Materials, die für ein Bauprojekt verwendet wurden.[322] In Tabellenform wurden Breite, Höhe und Tiefe verschiedener solcher Blöcke angegeben.[323] Die Angaben erfolgten in den bekannten Längeneinheiten, hauptsächlich der Elle.[324] Die effektiven Volumina wurden ebenfalls als Ellen angegeben, wobei eine solche Elle einer «Kubik-Elle» entsprach.

Zeugnisse, die solche und ähnliche Einblicke in die Kultur der Maya ermöglichen, sind selten. Dies liegt einerseits daran, dass die spanischen Missionare bei der Eroberung Amerikas viele Schriften zerstörten.[325] Andererseits, legten die Maya überhaupt eher Wert auf die Dokumentation ihrer Kriege und der Leben ihrer Anführer.[326] Die aussagekräftigsten Hinweise über das Volumen- und Kapazitätsverständnis der Maya liefern vermutlich erhaltene Tongefässe,[327] wie in Abbildung 13 dargestellt. Auf der Aussenseite solcher Gefässe sind zur Öffnung hin parallele Linien eingraviert oder gezeichnet worden, die vermutlich das Fassungsvermögen der Gefässe ähnlich einem Messbecher in kleinere Teile gliedern sollen.[328] Über standardisierte Volumeneinheiten oder deren Grösse gibt es zum heutigen Zeitpunkt jedoch keine allgemein anerkannten Informationen.

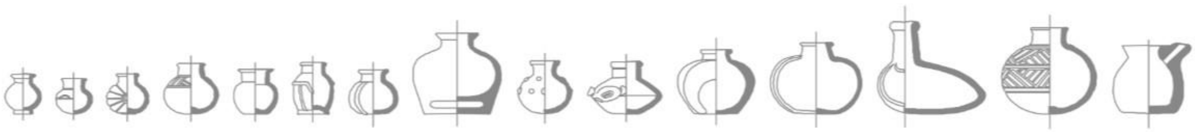


Abb. 13: Querschnitte von keramischen Vasen der Maya, die vermutlich als eine Art Messbecher gedient haben[329]

Möglicherweise legten die Maya in Anwendungsbereichen wie der Architektur, bei denen es für andere Kulturen unvorstellbar wäre, ohne Masseinheiten zu arbeiten, keinen solch grossen Wert auf diese Masseinheiten, oder zumindest nicht darauf, diese schriftlich zu dokumentieren. Einige Historiker vermuten beispielsweise, dass die Maya ihren Fokus eher darauf richteten, ihre Gebäude nach Punkten am Horizont zu orientieren, wo die Sonne an wichtigen Daten auf- oder unterging.[330] Natürlich schliesst eine solche «rituelle Architektur» die Verwendungen von Masseinheiten und Bauplänen nicht unbedingt aus,

[318] Imhausen, 2016, S. 48.
[319] Ebd.
[320] Hermann, 2019, S. 101.
[321] Ebd., S. 49.
[322] Imhausen, 2016, S. 116.
[323] Ebd., S. 117.
[324] Ebd.
[325] Wussing, 2008, S. 30.
[326] Minster, 2021.
[327] Cobos, 2010, S. 53.
[328] Ebd.
[329] Ebd.
[330] Webster, 1997, S. 221.

trotzdem zeigt sie aber, dass die Maya teilweise andere Prioritäten in ihrem Alltag und somit auch in ihren mathematischen Methoden verfolgten als beispielsweise die Ägypter.

3.4 Die Rechentechniken und ihre Anwendungen

Sowohl die Maya als auch die Ägypter kannten die einfache Addition und Subtraktion. Diese beiden simplen Rechenarten können leicht mit Zuhilfenahme der Finger ausgeführt werden, denn die Zuordnung von Finger und Einheit schafft einen praktischen Bezug zu einem mathematischen Problem. Wie das Zählen waren einige Arten des Rechnens mit den Fingern schon im Altertum in vielen Kulturen verbreitet.[331] Bildliche archäologische Funde in Ägypten, die bis in die Zeit des alten Reichs zurückreichen, lassen darauf schliessen, dass auch in der Verwaltung der Pharaonen mit den Fingern gerechnet wurde.[332] Jedoch gibt es keine schriftlichen Informationen über das Ausführen von Addition oder Subtraktion.[333]

Additionssysteme wie dasjenige der Ägypter eignen sich besonders gut, um auch grössere Summen einfach zu berechnen.[334] Dabei müssen einzig die Symbole einer Potenz zusammengezählt werden, was durch die Finger als Zähl- und Rechenhilfe keine grosse Anstrengung erfordert. Wichtig ist nur, die verschiedenen Potenzen nicht zu verwechseln.[335] Neben dem Additionssystem der Ägypter beinhaltet auch das Zahlensystem der Maya Elemente eines Additionssystems, denn die Zahlen von 1 bis 19 werden additiv als Kombination von Symbolen verschiedener Werte dargestellt.[336] Vor die Addition und Subtraktion von Zahlen, die kleiner als 20 sind, lassen sich mit dem Vigesimalsystem der Maya ausgesprochen einfach berechnen. Bei einer Addition werden jeweils 5 Punkte zu einem Strich zusammengefasst.[337] Falls bei der Subtraktion im Minuenden zu wenige Punkte sind, wird ein Strich in 5 Punkte umgewandelt, falls im Minuenden zu wenige Striche sind, wird ein Punkt der nächsthöheren Potenz in 4 Striche umgewandelt.[338]

Sowohl die Maya als auch die Ägypter verwendeten ein Zahlensystem, das sich aufgrund seines (teilweise) additiven Charakters besonders für Additionen und Subtraktionen eignete. Trotzdem wäre es vermutlich falsch zu behaupten, dass diese beiden Völker nur aufgrund des geeigneten Zahlensystems die Addition und Subtraktion entwickelten und in ihrem Alltag benutzten. Wahrscheinlicher ist, dass sich Addition und Subtraktion als grundlegende Werkzeuge oder Anwendungen des Zählens entwickelt haben, also noch vor der Zahlschrift der Maya, der Ägypter oder eines anderen Volkes.[339] Es gibt keine schriftlichen Aufzeichnungen, die zweifelsfrei bestätigen würden, dass die Maya auch Multiplikation und Division kannten oder anwendeten.[340] Dennoch vermuten Historiker:innen, dass die astronomischen Berechnungen solches Wissen erforderten.[341]

Aufgrund der mathematischen Papyri der Ägypter herrscht heutzutage in der Forschung Einstimmigkeit, dass und wie die Ägypter Multiplikation und Division ausführten,[342] auch wenn es sich dabei aus heutiger Sicht erst um vereinfachte Vorstufen der Multiplikation und Division handelte. Das Schema der Multiplikation, die jeweils schriftlich durchgeführt wurde, besteht aus zwei nebeneinander

331 Ifrah, 1986, S. 79.
332 Ebd.
333 Imhausen, 2016, S. 101.
334 Anderson, 1971, S. 56.
335 Ebd.
336 Siehe auch Kapitel 3.1.
337 Anderson, 1971, S. 56.
338 Ebd.
339 Ifrah, 1986, S. 16.
340 Anderson, 1971, S. 63.
341 Siehe auch Kapitel 3.4.1.
342 Die Ausführungen in diesem Absatz beruhen auf Imhausen, 2016, S. 85f.

geschriebenen Spalten. Die erste Zeile beinhaltet einen Punkt, der als 1 zählt, in der ersten Spalte und einen der Faktoren in der zweiten Spalte. Beide Einträge dieser Zeile werden nun beispielsweise verdoppelt und die neuen Werte, also 2 sowie das Doppelte des Faktors aus der ersten Zeile, in der nächsten Zeile aufgeschrieben. Durch Verdoppeln, Halbieren oder Verzehnfachen werden diese beiden Werte nun so lange manipuliert und die Ergebnisse der jeweiligen Berechnung in einer neuen Zeile aufgeschrieben, bis sich in der ersten Spalte genügend Einträge finden, die zusammen addiert den zweiten Faktor ergeben. Die Zeilen dieser Einträge werden markiert und die Einträge der zweiten Spalte dieser markierten Zeilen, also die Verdoppelungen, Hälften und Zehnfachen des Produktes, addiert. Tabelle 2 zeigt ein mögliches Schema der schriftlichen Multiplikation von 16 und 17. Die für die Markierungen ausschlaggebenden Summanden sind kursiv geschrieben. In den Papyri ist aufgrund der Aufgabenstellung jeweils vorgegeben, welcher Faktor in die erste Zeile geschrieben wird.

Tab. 2: Ägyptische Multiplikation von 16 und 17[343]

Markierungen	Erste Spalte	Zweite Spalte	Rechenschritte
	.	16	Startwerte
\	*2*	32	Verdopplung
\	*10*	160	Verzehnfachung
\	*5*	80	Halbierung
		272	Summe/Produkt

Die Division funktioniert nach einem ähnlichen Prinzip. Auch hier wird die erste Zeile, die einen Punkt sowie den Divisor enthält, durch fortgesetztes Halbieren, Verdoppeln und Verzehnfachen verändert und jeweils als neue Zeile festgehalten. Danach werden diejenigen Zeilen markiert, deren Einträge aus der zweiten Spalte zusammenaddiert den Dividenden ergeben. Die Einträge der ersten Spalte dieser Zeilen werden anschliessend ebenfalls addiert, wobei die Summe dem Quotienten der Division entspricht. Tabelle 3 zeigt das Schema der schriftlichen Division von 1120 durch 80. Die für die Markierungen ausschlaggebenden Summanden sind kursiv geschrieben.

Tab. 3: Ägyptische Division von 1120 durch 80[344]

Markierungen	Erste Spalte	Zweite Spalte	Rechenschritte
	.	80	Startwerte
\	10	*800*	Verzehnfachung
	2	160	Verdopplung
\	4	*320*	Verdopplung
		1120	Dividend
	14		Summe/Quotient

Imhausen schreibt, dass allgemein die Entwicklung arithmetischer Techniken wie die der Multiplikation oder Division auf die Entwicklung des Zahlensystems folge, davon beeinflusst werde und ihrerseits weitere mathematische Techniken beeinflussen und prägen werde.[345] Diese Aussage mag für die ägyptische Mathematik zutreffend sein,[346] jedoch müssen bezüglich der Mathematik der Maya einige Ergänzungen gemacht werden. Es ist wahrscheinlich, dass die geringe Anzahl an heute verfügbaren mathematischen Schriften der Maya die Ansichten über ihr mathematisches Wissen trübt. Beispielsweise sind, im Vergleich zur ägyptischen Mathematik, keine Schriften bekannt, welche die reine Multiplikation oder

[343] Imhausen, 2016, S. 89.
[344] Ebd., S. 91.
[345] Imhausen, 2016, S. 84.
[346] Ebd.

Division bestätigen würden.[347] Dadurch könnte fälschlicherweise davon ausgegangen werden, dass die Entwicklung der Mathematik nach dem von Imhausen genannten Prinzip nach der Entwicklung des Zahlensystems aufhörte. Da keine Formen «einfacher» Methoden wie Multiplikation und Division bekannt sind, hätten sich nach diesem Prinzip weitere, fortschrittlichere und im Alltag anwendbare Rechentechniken überhaupt nicht entwickeln können. Das Kalendersystem der Maya zeigt jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

3.4.1 Kalendarische Berechnungen der Maya

Die Maya besassen zwei verschiedene Kalender.[348] Der religiöse Kalender der Maya, *Tzolkin* genannt, setzte sich aus zwei Zyklen zusammen, einem «Zahlenzyklus» mit einer Länge von 13 Tagen und einem «Namenszyklus» mit der Länge von 20 Tagen, und zählte somit 260 Tage.[349] Die 20 Namen der Tage des Namenszyklus sind in Abbildung 14 aufgelistet. Da 13 und 20 teilerfremd sind, kam jede Kombination der Form aX, wobei a eine Natürliche Zahl zwischen 1 und 13 und X einer der 20 Tagesnamen ist, einmal im Verlauf eines religiösen Jahres vor.[350] *Haab*, der zweite Kalender, war ein Sonnenkalender aus 18 Monaten zu je 20 Tagen, mit einer zusätzlichen Periode von fünf Tagen, *Uayeb* genannt.[351] Auch jedes Datum des Sonnenkalenders wurde in der Form bY dargestellt, wobei b eine Zahl zwischen 0 und 19 beziehungsweise zwischen 0 und 5 beim *Uayeb* und Y ein Monatsname ist.[352] Bei der Wiedergabe von Daten kombinierten die Maya die beiden Kalender zur Form $aXbY$. Nach einer gewissen Zeit, nämlich nach 18'980 Tagen, also 52 Sonnenjahren oder 73 religiösen Jahren, wiederholte sich dieser Kalender-Zyklus und die Kombination der beiden Kalenderdaten entsprach wieder ihrer Ausgangsposition.[353]

Imix	*Cimi*	*Chuen*	*Cib*
Ik	*Manik*	*Eb*	*Caban*
Akbal	*Lamat*	*Ben*	*Etznab*
Kan	*Muluc*	*Ix*	*Cauac*
Chicchan	*Oc*	*Men*	*Ahau*

Abb. 14: Die unveränderliche Reihenfolge der Tage des Namenszyklus, spaltenweise und von links nach rechts gelesen[354]

Dieses Kalendersystem zeigt einerseits, dass die Maya ein Verständnis davon hatten, was heute *kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)* genannt wird.[355] Das kgV zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, die ein Vielfaches von beiden Zahlen ist, oder anders gesagt: Das kgV ist das Produkt aller Primfaktoren, die in mindestens einer der Zerlegungen der zwei Zahlen vorkommen, jeweils in ihrer kleinsten Potenz.[356] Hinzu kommt, dass die Astronomen der Maya wussten, dass das Ende einer Periode von 65 Venusjahren alle zwei Kalender-Zyklen mit dem Beginn eines neuen Zyklus zusammenfiel, dass also 65 Venusjahren 104 Erdenjahren entsprechen.[357] Da die Maya, wie alle präkolumbianischen Völker Mittelamerikas, ein solches Ereignis, also das kgV der Anzahl Tage eines Venusjahres, eines Erdenjahres und eines religiösen Jahres, aufwändig feierten,[358] kann davon ausgegangen werden, dass sich die Maya zumindest mit

[347] Anderson, 1971, S. 63.
[348] Ifrah, 1986, S. 452.
[349] Cauty, 2006, S. 18.
[350] Ebd.
[351] Ebd.; Siehe auch Kapitel 3.1.
[352] Ebd.
[353] Ifrah, 1986, S. 459.
[354] Ebd., S. 452.
[355] Ebd., S. 459.
[356] "Kleinstes gemeinsames Vielfaches", 2023.
[357] Ifrah, 1986, S. 459.
[358] Ebd.

dem Prinzip des kgV auseinandersetzten. Auch wenn es keine Texte gibt, die dies ausdrücklich bestätigen, lassen sich somit Spuren der Multiplikation in der Mathematik der Maya finden.

Das Kalendersystem der Maya beinhaltet aber auch noch andere Rechentechniken. Der Archivar und Bibliothekar Ernst Wilhelm Förstemann (1822-1906) untersuchte eine Abfolge von Zahlen im Dresdner Kodex[359] und erkannte, dass diese Stelle den zeitlichen Verlauf eines *Tzolkin* angibt.[360] Die 260 Tage werden in vier Etappen zu jeweils 65 Tagen durchlaufen, jede Etappe besteht aus den Schritten 9, 11, 20, 10 und 15 Tage.[361] Da ein «Zahlenzyklus» des religiösen Kalenders jedoch nur 13 Tage lang war und danach wieder bei 1 begann, verwendeten die Astronomen der Maya eine Methode, die im Wesentlichen das war, was heute «Rechnen *Modulo 13*» genannt werden würde.[362] Denn der von Förstemann untersuchte zeitliche Verlauf des *Tzolkin* macht nur Sinn, wenn man von der Summe der Schrittgrösse und des zahlenzyklischen Bestandteils des Datums so oft 13 subtrahiert, bis das Ergebnis höchstens noch 13 ist.[363] Ein Beispiel: Da beide Zyklen des religiösen Kalenders unabhängig voneinander fortschreiten, sind es 15 Tage von 12 *Imix* bis 1 *Cib*. 12 + 15 ergibt nämlich im Kalendersystem nicht 27, sondern 1, da 13 zweimal von 27 subtrahiert wird, sodass das Ergebnis nicht mehr grösser als 13 ist. Auch im heutigen gregorianischen Kalender werden Daten auf diese Weise umgerechnet, ansonsten wäre der Tag nach dem 31. Januar nicht der 1. Februar, sondern der 32. Januar.

Zudem kannten die Schreiber der Maya komplizierte Algorithmen, mit denen es möglich war zu einem gegebenen Datum *aXbY* das Datum *a'X'b'Y'* zu finden, das eine gegebene Anzahl von Tagen später liegt.[364] Eine andere Standardaufgabe war es, die Zeitspanne zwischen zwei gegebenen Daten *aXbY* und *a'X'b'Y'* zu bestimmen.[365] Was solche Rechnungen schwierig macht, ist die zyklische und deshalb wechselhafte Struktur des Kalendersystems. Gleichzeitig zeigt diese Art Aufgaben, dass die Maya «über ausgefeilte Rechentechniken verfügten, mit denen sie in einer Vielzahl von Kalenderzyklen den Überblick behielten», so der Geschichtsforscher André Cauty (*1941). Die genannten Erkenntnisse bestätigen die Thesen, dass die Rechentechniken der Maya sowohl durch die Astronomie und Zeitrechnung als auch durch ihre Religion beeinflusst wurden.

3.4.2 Ägyptisches Bruchrechnen

Auch wenn die Ägypter kein solch kompliziertes Kalendersystem verwendeten, kannten sie neben den vier Grundrechenarten noch weitere Rechentechniken. Evidenz hierfür bieten vor allem die mathematischen Papyri.[366] Der Vorteil vieler Papyri ist, dass nahezu jeder Rechenschritt genau beschrieben ist.[367] So können Mathematiker:innen auch heute noch nachvollziehen, welche mathematischen Überlegungen die ägyptischen Schreiber genau gemacht haben.

Ein Beispiel ist das Bruchrechnen.[368] Neben der Multiplikation oder Division mit ausschliesslich natürlichen Zahlen lösten die Ägypter auch Aufgaben, die Brüche beinhalteten.[369] Tabelle 4 zeigt das Schema der schriftlichen Multiplikation von 5⅓ und 256. Die für die Markierungen ausschlaggebenden Summanden sind kursiv geschrieben.

[359] Siehe auch Kapitel 1.4.2.
[360] Cauty, 2006, S. 18.
[361] Ebd.
[362] Ebd.
[363] Ebd.
[364] Ebd., S. 21.
[365] Ebd.
[366] Wussing, 2008, S. 121.
[367] Ebd.
[368] Imhausen, 2016, S. 90.
[369] Ebd.

Tab. 4: Ägyptische Multiplikation von 5⅓ und 256[370]

Markierungen	Erste Spalte	Zweite Spalte	Rechenschritte
\	.	256	Startwerte
	2	512	Verdopplung
\	*4*	1024	Verdopplung
	⅔	170⅔	Bruchteil (Drittelung)
\	⅓	85⅓	Halbierung
		1365⅓	Summe

Bei solchen Berechnungen kam es oft vor, dass Zahlen – auch Brüche – halbiert oder verdoppelt werden mussten.[371] Ägyptische Brüche, also Brüche mit dem Zähler 1, können leicht durch Halbieren des Nenners verdoppelt werden. Der Nenner muss dabei jedoch eine gerade Zahl sein.[372] Brüche mit ungeraden Nennern sind nicht so leicht zu verdoppeln, wenn die Bedingung, dass der Zähler 1 bleibt, erfüllt bleiben muss.[373] Das Doppelte des Bruchs ⅕ wird, obwohl die einfachere Darstellung ⅖ nicht falsch ist, als ⅓ ⅟₁₅ dargestellt. Da es jedoch zu umständlich wäre, den Bruch bei jedem Antreffen eines solchen Problems erneut umzurechnen, wurden die häufigsten dieser Verdoppelungen und ihre Darstellung in Stammbrüchen in einer Tabelle aufgeschrieben, der *2÷n Tabelle*.[374] Die Anzahl der Stammbrüche für jede Darstellung sowie die Nenner der Brüche werden innerhalb der Tabelle möglichst klein gehalten.[375] Neben der 2÷n Tabelle fertigten die ägyptischen Schreiber auch noch weitere Tabellen als Nachschlagewerke an, beispielsweise für die Verzehnfachung oder die Addition von Stammbrüchen.[376]

Die ägyptischen Schreiber kamen in ihrem Alltag vor allem bei der Verteilung von Nahrungsrationen mit Bruchrechnungen in Kontakt.[377] Aufgabe 40 im Papyrus Rhind besteht beispielsweise darin, 100 Brote auf 5 Männer unterschiedlichen Ranges zu verteilen, wobei die Ration jeden Mannes von seiner Position abhängt.[378] Andere Quellen zeigen, dass Brüche auch in anderen Kontexten eine Rolle spielten: Die Administration eines Tempels, der Alltag in einem Palast, Bauprojekte, Privathaushalte und militärische Exkursionen.[379] Diese Erkenntnisse zeigen, dass die Organisation staatlicher und privater Angelegenheiten die Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten der Ägypter beeinflussten.

Ein weiterer Aufgabentyp der Papyri sind die *Hau*-Rechnungen.[380] Dabei musste eine unbestimmte Grösse x aus einer linearen Gleichung berechnet werden. Auch solche Aufgaben befassen sich häufig mit der Verteilung von Rationen.[381] Bei den sogenannten *pśw*-Rechnungen geht es hingegen oft darum, den Getreidegehalt von Brot oder Bier zu berechnen.[382] Dabei finden sich auch (endliche) arithmetische und geometrische Reihen.[383]

Die Einzigartigkeit der ausführlichen Beschreibungen der Berechnungen auf den Papyri im Vergleich mit anderen Kulturen unterstützen die These, dass die ägyptische Mathematik nicht von anderen

370 Ebd., S. 91.
371 Ebd., S. 93.
372 Ebd.
373 Ebd.
374 Ebd.
375 Ebd., S. 95.
376 Ebd.
377 Ebd., S. 106.
378 Ebd.
379 Ebd., S. 110.
380 Wussing, 2008, S. 117.
381 Ebd.
382 Müller-Römer, 2016, S. 7.
383 Wussing, 2008, S. 117.

Kulturen beeinflusst wurde, sondern sich eigenständig entwickelt hat. Auch das im Vergleich zur Mathematik anderer Kulturen hohe Niveau der Berechnungen spricht für diese These.

3.4.3 Die Mathematik als Mittel zur Beschreibung der Welt

Anhand der Untersuchung der verschiedenen Rechentechniken der Maya und Ägypter kann gezeigt werden, dass diese mathematischen Methoden stark von den jeweiligen praktischen Bedürfnissen der beiden Kulturen geprägt waren.[384] Wie alle mittelamerikanischen Völker waren die Maya fasziniert von den Geheimnissen des Kosmos, von der zyklischen und vorausbestimmten Wiederkehr der astronomischen Ereignisse und vom stetigen Wechsel der Jahreszeiten und ihrem Einfluss auf die verschiedenen Phasen des Maisanbaus.[385] Sie waren fasziniert vom Zyklus von Leben und Tod, vom Zyklus von Tag und Nacht und von der Zeit selbst, die sie als übernatürliches Phänomen auffassten.[386]

Diese Erscheinungen und Phänomene, deren Erklärung für die Maya in der Religion zu suchen war,[387] versuchten sie dennoch mathematisch zu beschreiben. Ihre Mathematik, die von Priestern angewandt wurde, war stark durch die Religion geprägt und verfolgte wahrscheinlich mystische und wahrsagerische Ziele.[388] Hier sieht Ifrah einen Schwachpunkt der Mathematik der Maya: «Obgleich die Maya einen der besten Kalender der Geschichte entwickelt haben und grosse Leistungen in der Astronomie vollbrachten, blieben sie doch Sklaven ihres Mystizismus und ihrer Religion.»[389]

Die Mathematik der Ägypter war hingegen weniger geprägt ihrer Religion jedoch umso mehr von praktischen Aufgaben aus dem Alltag. Die weit fortgeschrittene Arbeitsteilung hatte den Stand der Schreiber hervorgebracht.[390] Diese waren die ausführenden Organe des Staates und mussten Steuern, Feldvermessungen, Bauprojekte und viele andere Angelegenheiten verwalten.[391] Die mathematischen Papyri dienten den Schreibern dabei als Nachschlagewerke und Hilfsmittel, um diese Aufgaben, die teilweise ein hohes Mass an mathematischen Fähigkeiten erforderten, effizienter und einfacher zu erledigen.[392] Daher wurden die bekannten Methoden und Techniken ausgesprochen ausführlich beschrieben. Der Historiker Kurt Vogel (1888-1985) sieht diese Beschreibungen sogar als Vorstufe der heute üblichen Beweisführung.[393] Trotz oder vielleicht gerade wegen dieser scheinbaren Ungleichheit zwischen den ägyptischen Vorstellungen der Mathematik und denjenigen der Maya muss erwähnt werden, dass sich grundsätzlich beide Völker des wissenschaftlichen Charakters und den Möglichkeiten der Mathematik bewusst waren, was im Rahmen dieser Maturaarbeit gezeigt werden konnte. Beide Völker nutzten die Mathematik in erster Linie um die Welt um sie herum zu beschreiben.

---

[384] Ifrah, 1986, S. 475; Wussing, 2008, S. 114.
[385] Ifrah, 1986, S. 448.
[386] Ebd.
[387] Ebd.
[388] Ebd., S. 475.
[389] Ebd., S. 447.
[390] Wussing, 2008, S. 114.
[391] Ebd.
[392] Ebd.
[393] Vogel, 1958, S. 73.

4 Fazit und Ausblick

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sowohl die Maya als auch die Ägypter ein tiefes Verständnis für Mathematik hatten und Techniken entwickelten, die auf ihre speziellen Bedürfnisse und Prioritäten zugeschnitten waren. Hinsichtlich der formulierten Untersuchungsfrage konnte gezeigt werden, dass unterschiedliche und ähnliche Ausprägungen der mathematischen Fähigkeiten der Ägypter und der Maya grundsätzlich dadurch begründet werden können, dass die ägyptische Mathematik stark durch praktische Aufgaben des Alltags geprägt war, während die Mathematik der Maya von ihrer Religion und ihrem Interesse an Astronomie beeinflusst wurde. Den ägyptischen Schreibern dienten mathematische Papyri als nüchternes Nachschlagewerk und Hilfsmittel, um alltägliche Probleme wie die Verteilung von Rationen oder die Organisation des Staatsapparats zu bewältigen. Im vom Gedanken einer göttlichen Harmonie geprägten Weltbild der Maya diente die Mathematik hingegen dazu, Daten von religiösen Zeremonien und Ereignissen in Rücksicht auf ihre komplizierten kalendarischen Abläufe zu berechnen.

Diese Schlussfolgerungen verdeutlichen die mögliche Vielfalt von mathematischen Entwicklungen. Viele Unterschiede in der Mathematik der beiden Völker konnten auf soziokulturelle Faktoren zurückgeführt werden. Viele Gemeinsamkeiten in der Mathematik konnten auf geografisch-biologische Faktoren, vor allem auf anatomische Eigenschaften des Menschen, wie der Anzahl Finger oder der Speicherkapazität des Kurzzeitgedächtnisses, zurückgeführt werden. Denn während sich kulturelle Merkmale wie die Religion oder soziale Strukturen zeitlich oder örtlich getrennter Völker unterschiedlich entwickelt haben mögen, hat sich die menschliche Anatomie dabei kaum verändert. Solche von Raum und Zeit unabhängige Faktoren haben zu ähnlichen Entwicklung der Mathematik der beiden Kulturen geführt.

Weitere Faktoren wie das Militärwesen wurden zwar berücksichtigt, haben aber schlussendlich keinen wesentlichen Einfluss auf die Mathematik gehabt. Die Erkenntnis, dass Einflüsse solcher Faktoren ausgeschlossen werden können, erforderte lange und aufwendige Recherchearbeit. Diese Recherchearbeit hätte möglicherweise durch den direkten Austausch mit Expert:innen, beispielsweise in Form von Interviews, umgangen werden können. Die Ergebnisse, die im Rahmen dieser Maturaarbeit entstanden sind, sind jedoch nicht vollständig und beziehen sich nur auf Sekundärliteratur anderer Autor:innen. Eine grössere Menge an originalen Artefakten und Daten hätte zu aussagekräftigerer Sekundärliteratur geführt. Die Aussagekraft der Ergebnisse dieser Untersuchung hätten auch durch die direkte Auseinandersetzung mit Primärquellen gesteigert werden können, was mangels Zeit und Wissen jedoch nicht möglich war. Zudem hätte die Aussagekraft durch den Austausch mit Expert:innen verbessert werden können.

Weitere Untersuchungsfragen drängen sich auf, beispielsweise wie sich die Mathematik von früheren oder späteren zeitlichen Epochen der beiden Kulturen oder unter Einfluss anderer Völker unterscheidet. Inwiefern unterscheiden oder ähneln sich die mathematischen Kenntnisse der Ägypter im neuen Reich und der Maya nach der Eroberung Amerikas? Inwiefern können diese Unterschiede begründet werden und ähneln die Gründe denjenigen aus dieser Untersuchung? Auch wäre es interessant zu sehen, ob und auf welche anderen Völker die in diesem Bericht genannten Begründungen ebenfalls anwendbar sind. Haben diese Völker zur gleichen Zeit oder am selben Ort wie die Maya oder Ägypter gelebt? Ausserdem liesse sich in Anbetracht weiterer Kulturen und der Entwicklung ihrer Mathematik untersuchen, ob allgemein gültige Gesetzmässigkeiten und Theorien formuliert werden können. Eine umfassende Untersuchung dieser Fragen könnte zu einer Vertiefung des heutigen Wissens um die Rolle der Mathematik im Verlauf der Geschichte beitragen. Jedoch erfordert eine solche Untersuchung ein umfassenderes historisches und mathematisches Wissen sowie die genaue Auseinandersetzung mit Primärquellen, die möglicherweise noch nicht diesen Anforderungen entsprechend analysiert wurden.

5 Literaturverzeichnis

5.1 Print-Quellen

Anderson, William French. Arithmetic in Maya Numerals, in: American Antiquity, Bd. 36, Nr. 1, 1971, S. 54-63.

Balmès, Raymond. Leçons de Philosophie, Bd. 2, Paris: Éditions de l'École, 1965.

Bidwell, James King. Mayan Arithmetic, in: The Mathematics Teacher, Bd. 60, Nr. 7, 1967, S. 762-768.

Cauty, André. Die Arithmetik der Maya, in: Spektrum der Wissenschaft Spezial Ethnomathematik, Nr. 2, 2006, S. 16-21.

Cauty, André; Hoppan, Jean-Michel. Die zwei Nullen der Maya, in: Spektrum der Wissenschaft Spezial Ethnomathematik, Nr. 2, 2006, S. 22-25.

Chrisomalis, Stephen. The Comparative History of Numerical Notation, unveröffentlichte Diplomarbeit, Doctor of Philosophy. Montreal: McGill University, 2003.

Closs, Michael. Maya Mathematics, in: Grattan-Guinness, Ivor (Hg.): Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. London: Routledge, 1994, S. 143-149.

Cobos, Antonio Prado. El Creador Maya – Ancient Maya Measurement System: Length, übers. von Zachary Nelson. 2010.

Dauben, Joseph. The Universal History of Numbers and The Universal History of Computing – A Book Review by Joseph Dauben, in: Notices of the American Mathematical Society, Bd. 49, Nr. 1, 2002, S. 32-38.

Gerdes, Paulus. Ethnomathematik – dargestellt am Beispiel der Sona-Geometrie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

Guitel, Geneviève. Histoire comparée des numérations écrites. Paris: Flammarion, 1975.

Hefendehl-Hebecker, Lisa. Überlegungen und Erfahrungen zur Einführung der negativen Zahlen, in: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Nr. 3, 1990, S. 78-102.

Hermann, Dietmar. Mathematik im Vorderen Orient. Berlin: Springer Spektrum, 2019.

Ifrah, Georges. Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt am Main: Campus Verlag, 1986.

Imhausen, Annette. Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History. Princeton: Princeton University Press, 2016.

Jäger, Denise. Vom Zählen zur Mathematik - Die Mathematik in den alten Hochkulturen, unveröffentlichte Diplomarbeit, Lehramtsstudium. Wien: Universität Wien, 2014.

Lévy, Tony. A propos de l'histoire des numérations et de l'ouvrage de G. Ifrah : Histoire Universelle des Chiffres, in: Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Publique, Nr. 398, 1995, S. 531-534.

Macri, Martha. The Numerical Head Variants and the Mayan Numbers, in: Anthropological Linguistics, Bd. 27, Nr. 1, 1985, S. 46-85.

Mahmood, Osama; Tahan, Rosy. Discussing the Review of Universal History of Numbers and Universal History of Computing by Joseph Dauben. Abu Dhabi: New York University Abu Dhabi, 2018.

Nachtigall, Horst. Zur Entstehung der amerikanischen Hochkulturen, in: Paideuma: Mitteilungen zur Kulturkunde, Bd. 7, 1960, S. 151-172.

O'Brien, Patricia; Christiansen, Hanne. An Ancient Maya Measurement System, in: American Antiquity, Bd. 51, Nr. 1, 1986, S. 136-151.

Parker, Richard Anthony. Ancient Egyptian astronomy, in: Philosophical Transactions of the Royal Society A, Bd. 276, Nr. 1257, 1974, S. 51-65.

Parzinger, Hermann. Die Kinder des Prometheus. München: C.H.Beck, 2016.

Pflanz, Manfred. Soziokulturelle Faktoren und innere Krankheiten, in: Neunundsiebzigster Kongress. Verhandlungen der Deutschen Gesellschaft für Innere Medizin, Bd. 79. München: J.F. Bergmann-Verlag, 1973, S. 69-74.

Ritter, James. La Mésopotamie et Monsieur Ifrah, in: Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Publique, Nr. 399, 1995, S. 681-685.

Sethe, Kurt. Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern: Und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte von Rechenkunst und Sprache. Strassburg: Karl J. Tübner Verlag, 1916.

Taube, Karl Andreas. The Major Gods of Ancient Yucatan. Washington, DC: Dumbarton Oaks, 1992.

Thompson, John Eric Sidney. Maya Hieroglyphic Writing. Introduction. Washington, DC: Carnegie Institution of Washington, 1950.

Thompson, John Eric Sidney. Maya astronomy, in: Philosophical Transactions of the Royal Society A, Bd. 276, Nr. 1257, 1974, S. 83-98.

Vinette, Francine. In Search of Mesoamerican Geometry, in: Closs, Micheal (Hg.): Native American Mathematics. Austin: University of Texas Press, 1986, S. 387-407.

Vogel, Kurt. Vorgriechische Mathematik I. Würzburg: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, 1958.

Webster, David. The Study of classic Maya Architecture, in: Latin American Research Review, Bd. 32, Nr. 2, 1997, S. 219-232.

Willers, Michael. Denksport Mathematik. München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 2010.

Wussing, Hans. 6000 Jahre Mathematik. Berlin: Springer Spektrum, 2008.

5.2 Online-Quellen

Ägyptische Zahlschrift: Wikipedia, 24.05.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84gyptische_Zahlschrift [15.06.2023].

Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Süss-Stepancik, Evelyn. Historisches zur Entwicklung des Zahlbegriffs, Lehrmittel: Dimensionen Mathematik 5, Verlag E. Dorner, 2013, [PDF] https://c.wgr.de/f/verlage/westermanngruppe-at/dimensionen-mathematik/materialien/01_ZahlenUnd-Rechengesetze/02_Zahlensysteme/01_02_HistorischesZahlbegriff.pdf [13.10.2023].

Comparative History: Wikipedia, 19.12.2022, [online] https://en.wikipedia.org/wiki/Comparative_history [08.04.2023].

Entzifferung der Mayahieroglyphen im digitalen Zeitalter: Hypotheses. Digital Humanities Cologne, 12.06.2017, [online] https://dhc.hypotheses.org/371 [20.10.2023].

Ethnomathematik: Wikipedia, 22.11.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Ethnomathematik [09.04.2023].

Ganze Zahlen, Historisches: Lernhelfer, 2010, [online] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/ganze-zahlen-historisches [20.10.2023].

Geometrie einfach erklärt: Learnattack, 2023, [online] https://learnattack.de/mathematik/geometrie [13.04.2023].

Grundrechenart: Wikipedia, 07.03.2023, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Grundrechenart [13.04.23].

Häusler, Eric. Die klassischen Methoden der historisch-vergleichenden Forschung, Seminar: Methoden des internationalen Vergleichs, Soziologisches Institut, Universität Zürich, 28.04.2009, [PPT] https://www.suz.uzh.ch/dam/jcr:00000000-5103-bee3-0000-0000718fbd58/8_hist_vergl.ppt [09.04.2023].

Höhle von Gargas: Wikipedia, 30.07.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6hle_von_Gargas [25.05.2023].

Jones, Bryan. MU Psychologists Demonstrate Simplicity of Working Memory, in: MU News Bureau, 23.04.2008, [online] https://web.archive.org/web/20130407194136/http://munews.missouri.edu/news-releases/2008/0423-rouder-working-memory.php [20.10.2023].

Kaelble, Hartmut. Historischer Vergleich, in: Docupedia-Zeitgeschichte, 14.08.2012, [online] https://docupedia.de/zg/Historischer_Vergleich 2012 [08.04.2023].

Kardinalzahl (Mathematik): Wikipedia, 30.11.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Kardinalzahl_(Mathematik) [31.05.2023].

Kaufhold, Martin. Vergleichende Geschichte, in: Mittelalterliche Geschichte, 2020, [online] https://mittelalterliche-geschichte.de/kaufhold-martin-01/ [08.04.2023].

Kleinstes gemeinsames Vielfaches: Wikipedia, 24.09.2021, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinstes_gemeinsames_Vielfaches [21.10.2023].

Klenner, Barbara. Ordinales und kardinales Zahlenverständnis, in: Zahlen-Raum, 2012, [online] http://www.zahlen-raum.at/index.php?p=4_5_Ordinal-und-Kardinalaspekt [09.04.2023].

Mathematik und Architektur: Schule.at, 01.04.2012, [online] https://m.schule.at/portale/mathematik/themen/detail/mathematik-und-architektur.html [13.04.2023].

Maya Numerals: Wikipedia, 18.03.2023, [online] https://en.wikipedia.org/wiki/Maya_numerals [13.04.2023].

Maya-Zahlschrift: Wikipedia, 29.11.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Maya-Zahlschrift [20.10.2023].

Metrisches Einheitensystem: Wikipedia, 01.09.2023, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Metrisches_Einheitensystem [17.10.2023].

Millersche Zahl: Wikipedia, 27.03.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Millersche_Zahl [20.10.2023].

Minster, Christopher. Economy and Trade of the Ancient Mayans, in: ThoughtCo., 24.04.2021, [online] https://www.thoughtco.com/ancient-maya-economy-and-trade-2136168 [17.10.2023].

Müller-Römer, Frank. Die Mathematik im alten Ägypten, in: Propylaeumdok, 25.09.2016, [PDF] https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/propylaeumdok/3219/1/Mueller_Roemer_Die_Mathematik_2016.pdf [21.10.2023].

Müller-Römer, Frank. Mathematikunterricht im alten Ägypten, in: Propylaeumdok, 10.10.2011, [PDF] https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/propylaeumdok/volltexte/2011/1169 [31.05.2023].

Multivariate Verfahren: Wikipedia, 18.01.2022, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Multivariate_Verfahren [08.04.2023].

Nichteuklidische Geometrie: Lernhelfer, 2010, [online] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/nichteuklidische-geometrie# [10.12.2023].

Nickel, Gregor. Was ist Mathematik?, Seminar: Philosophie und Geschichte der Mathematik II, Sommerseminar, Universität Siegen, 17.04.2012, [PDF] https://www.uni-siegen.de/fb6/phima/lehre/phima12/was_ist_mathematik.pdf [08.04.2023].

Niederberger, Andreas. Kontingenz, in: Staatslexikon, 08.06.2022, [online] https://www.staatslexikon-online.de/Lexikon/Kontingenz [08.04.2023].

Nünning, Ansgar. Vielfalt der Kulturbegriffe, in: BPB Bundeszentrale für politische Bildung, 23.07.2009, [online] https://www.bpb.de/lernen/kulturelle-bildung/59917/vielfalt-der-kulturbegriffe/ [13.04.2023].

O'Connor, John; Robertson Edmund. Mayan mathematics, in: MacTutor, Nov 2000, [online] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mayan_mathematics/ [20.10.2023].

Ordinalzahl: Wikipedia, 14.03.2023, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Ordinalzahl [31.05.2023].

Rieck, Sophia. Infoblatt Die Maya, in: Klett Terrasse Online, 31.07.2014, [online] https://www.klett.de/alias/1038312 [15.06.2023].

Stephan, Holger. Dualität in der Elementaren Geometrie, Vortrag, Vortrag zum Tag der Mathematik 2012, Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 18.04.2012, [PDF] https://www.wias-berlin.de/people/stephan/tdm12.pdf [12.10.2023].

Uthmeier, Thorsten. Gargas (Hautes-Pyrénées, Frankreich), in: UFG Institut für Ur- und Frühgeschichte Erlangen, [online] https://www.uf.phil.fau.de/abteilungen/aeltere-urgeschichte/projekte-der-aelteren-urgeschichte/die_sammlung_wendel/bilderhoehlen-11-gargas/#pagewrapper [25.05.2023].

Welskopp, Thomas. Vergleichende Geschichte, in: EGO Europäische Geschichte Online, 03.12.2010, [online] http://ieg-ego.eu/de/threads/theorien-und-methoden/vergleichende-geschichte [08.04.2023].

Yin und Yang: Wikipedia, 18.10.2023, [online] https://de.wikipedia.org/wiki/Yin_und_Yang [12.10.2023].

5.3 Abbildungsverzeichnis

5.4 Tabellenverzeichnis

Tab. 3: Ägyptische Division von 1120 durch 80, S. 46, aus: [Imhausen, Annette. Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History. Princeton: Princeton University Press, 2016, S. 89].

Tab. 4: Ägyptische Multiplikation von 5⅓ und 256, S. 49., aus: [Imhausen, Annette. Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History. Princeton: Princeton University Press, 2016, S. 91].

6 Anhang

6.1 Quellenkritik – Universalgeschichte der Zahlen

Zusätzlich zur in Kapitel 2.4 allgemein geäusserten Quellenkritik muss *Universalgeschichte der Zahlen* von Georges Ifrah, ein in der vorliegenden Arbeit oft zitierter und paraphrasierter Sekundärtext, separat kritisch beurteilt werden. Bei besagtem Werk handelt es sich laut dem Autor selbst als «vermutlich einziges Buch, das eine mehr oder weniger universelle und umfassende Geschichte der Zahlen erzählt».[394] Dank seinem populärwissenschaftlichen Charakter und der faszinierenden und zugleich durchaus detaillierten Schilderung der von Ifrah beanspruchten Erkenntnisse, konnte das Buch seit seiner französischsprachigen Ersterscheinung im Jahr 1981 grosse Erfolge feiern und sich der Begeisterung einer breiten Leserschaft erfreuen. Gelobt von Zeitschriften wie *Le Figaro* oder *The Guardian* wurde das Buch des autodidaktischen Historikers und zum Zeitpunkt der Veröffentlichung ehemaligen Mathematiklehrers bald zum Bestseller.[395]

Trotz dieses Erfolgs stand und steht *Universalgeschichte der Zahlen* bis heute bei vielen auf die Mathematikgeschichte spezialisierten Historikern in der Kritik, dies aus mehreren Gründen. In einer von Joseph Dauben (*1944), Professor für Geschichte und Wissenschaftsgeschichte, verfassten Buchrezension geht dieser auf Schwachstellen und zu bemängelnde Aspekte von Ifrahs Werk ein.[396] Dauben bezieht sich in seiner Rezension auf die Kritik einer fünfköpfigen Expertengruppe aus Frankreich, welche sich zum Ziel setzte, Ifrahs Fehler trotz oder gerade wegen der Popularität seines Buches aufzuzeigen. Ifrah habe teilweise bereits vorhandene Erkenntnisse aus der Geschichtsforschung ignoriert oder diese sogar als seine eigenen Leistungen beansprucht. Laut James Ritter, einem Mathematiker der *Université de Paris*, schenke Ifrah der Arbeit, die auf dem Gebiet der mesopotamischen Mathematikgeschichte zum Zeitpunkt der Veröffentlichung bereits erbracht wurde, kaum Beachtung. Auch wenn Ifrah zu Beginn des Buches anmerkt, dass er sich den Leistungen derer vor ihm bewusst sei, fehlen im späteren Verlauf mancherorts die Erwähnungen eben dieser Vorgänger.[397] Als Beispiel hierfür nennt Dauben den Mathematiker Graham Flegg (1924-2015) und seinen Beitrag zur Erforschung der Zahlengeschichte. Ifrah erwähnt weder den Mathematiker noch dessen Werk.

Weiter kritisiert unter anderem der Mathematikhistoriker Tony Lévy (1943) Ifrahs Tendez, seine Vermutungen als bekannte Fakten darzustellen. Die von Ifrah präsentierten Zusammenhänge und Schlussfolgerungen seien «oft anfechtbar, allgemein schwach und manchmal vollständig imaginär».[398] Während Experten die lückenhaften Quellen zu den Ursprüngen der Hindu-Arabischen Zahlnotation bedauern, stelle Ifrah seine Aussagen, welche sich ebenso nur auf die wenigen heute erhaltenen schriftlichen Überlieferungen stützen können, als unbestreitbare Tatsachen dar. Lévy nennt diesbezüglich die zweifelhafte Datierung von Ersterwähnungen der Hindu-Arabischen Ziffern. Gerade aufgrund fehlender Primärquellen auf dem Gebiet der Entstehungsgeschichte der Zahlen sollte Ifrah seine Aussagen vorsichtiger formulieren, seine Forschungsergebnisse selbst kritisch hinterfragen und seiner Leserschaft klar kommunizieren, was Fakt und was Vermutung ist.

Neben der genannten Gruppe äusserten sich auch schon früher Experten kritisch gegenüber Ifrahs Werk, noch bevor Übersetzungen gedruckt wurden.[399] Diese Kritik wurde von Ifrah jedoch

[394] Ifrah, 1986, S. XVIIf.
[395] Dauben, 2002, S. 32.
[396] Anm.: Dauben wurde seinerseits unter anderem dafür kritisiert, einige Kommentare zu Ifrahs Werk auf zu persönliche und subjektive Art zu äussern; Vgl. Mahmood; Tahan, 2018.
[397] Ritter, 1995, S. 683.
[398] Lévy, 1995, S. 532.
[399] Dauben, 2002, S. 33.

grösstenteils ignoriert, weshalb sich die englische Übersetzung inhaltlich kaum von der französischen Ersterscheinung unterscheidet. Obwohl zwischen den Zeitpunkten der beiden Publikationen mehrere Jahre vergingen, verpasste Ifrah diese Gelegenheit um auf Fragen und Zweifel bezüglich seiner Schlussfolgerungen zu reagieren und so spätere Auflagen in Sachen Zuverlässigkeit, Richtigkeit und Nutzen für andere Forschende zu verbessern.[400]

Trotz genannter Kritik wurde *Universalgeschichte der Zahlen* als Sekundärtext für vorliegende Arbeit berücksichtigt. Das Werk wurde bereits oft von anderen Autor:innen zitiert und ist somit in weiten Kreisen als das angesehen, was es fälschlicherweise behauptet zu sein: Eine Sammlung allen signifikanten Wissens über die Wissenschaft der Zahlen, welches zum Zeitpunkt der Veröffentlichung verfügbar war.[401] Da der Autor dieser Maturaarbeit sich aber vor allem in Kapitel *1 Einleitung* auf Ifrah bezieht und er seine tatsächlichen Ergebnisse auch mit Sekundärliteratur anderer Autor:innen begründet, wurde der Prozess der Ergebnisfindung dennoch mit der nötigen Sorgfalt durchgeführt.

[400] Dauben, 2002, S. 34.
[401] Vgl, Ifrah XVII.

7 Ehrenwörtliche Erklärung

Ich, Sebastian Ludwig, am 03.01.2005 in Chur geboren, erkläre,

1. dass ich andere als die angegebenen Kooperationspartner, Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfe bedient habe (so auch, dass keine Teile der Arbeit von künstlicher Intelligenz (KI) geschrieben wurden),

2. dass ich, falls die Arbeit einen Kooperationspartner betrifft, diesen über Titel, Form und Inhalt unterrichtet und sein Einverständnis eingeholt habe, erhobene Daten und Informationen zu verwerten und hier einfliessen zu lassen.

Ich, Sebastian Ludwig, am 03.01.2005 in Chur geboren, erkläre mich einverstanden, dass sowohl eine elektronische Plagiatsprüfung wie auch eine Prüfung auf KI durchgeführt werden kann.

…………………………	…………………………
Ort, Datum	Unterschrift